

Б.Н. Шапуков

**Задачи
по группам
ли**

Б. Н. ШАПУКОВ

ЗАДАЧИ ПО ГРУППАМ ЛИ

Учебное пособие



ИЗДАТЕЛЬСТВО
КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1989

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Казанского университета

Научный редактор – проф. А.П.Широков

Рецензенты: проф. В.Р.Кайгородов,
доц. В.Г.Копп

Пособие охватывает все основные разделы теории групп Ли и алгебр Ли. В нем содержатся также задачи по теории линейных представлений групп, теории однородных пространств, инфинитезимальной теории групп Ли преобразований на дифференцируемых многообразиях.

Предназначено для проведения семинаров со студентами физико-математических специальностей, изучающих группы Ли и их приложения. Оно может быть использовано также для самостоятельной работы студентов, при выполнении курсовых и дипломных работ, аспирантами.

Борис Никитович Шапуков

ЗАДАЧИ ПО ГРУППАМ ЛИ

Учебное пособие

Редактор А.М.Габитова. Обложка художника И.М.Воробьева. Техн. редактор Е.Ф.Гаврилова. Корректор Г.И.Жук.

ИБ № 1241

Сдано в набор 20.12.88. Подписано к печати 31.03.89. Формат 60x84 1/16. Бум.офсетная. Печать офсетная. Усл.печ.л. 8,84. Усл. кр.отт. 9,1. Уч.-изд.л. 8,94. Тираж 1000 экз. Заказ 3-186 Цена 60 к.

Издательство Казанского университета 420008 Казань, ул.Ленина, 18

Полиграфический комбинат им.К.Якуба

Государственного комитета Татарской АССР

по делам издательств, полиграфии и книжной торговли

420084 Казань, ул.Баумана, 19

III I602050000 - 023 18 - 89
075(02) - 89

ISBN 5-7464-0162-5

© Издательство
Казанского
университета,
1989 г.

ВВЕДЕНИЕ

Теория групп вообще и групп Ли в частности стала в настоящее время одним из наиболее существенных разделов современной математики. Ее значение все возрастает и во многих других областях естественных наук — механике, физике, химии, биологии и др. Понятно поэтому, что изучение теории групп и ее приложений должно составлять одну из важных составных частей математического образования. Имеется ряд прекрасных учебников и монографий (приведенные в списке рекомендованной литературы составляют лишь их малую, хотя и наиболее существенную часть). Однако мало методических разработок по различным разделам теории, отсутствует задачник по теории групп Ли. Настоящее пособие предназначено восполнить этот пробел. В его основу положен многолетний опыт чтения спецкурса и проведения семинара по группам Ли на механико-математическом факультете Казанского университета.

Цель задачника — помочь читателю овладеть основными понятиями и методами теории групп Ли. Мы считаем целесообразным начать с задач по топологическим группам. Затем в § 2–7 идут группы Ли, алгебры Ли и связанные с ними конструкции. Задачи по теории линейных представлений содержатся в § 8 и 9. Последующие § 10–12 относятся к методам изучения структуры группового многообразия. Наконец, § 13–15 связаны с теорией групп Ли преобразований на дифференцируемых многообразиях и, в частности, с теорией однородных пространств. Здесь используются также и инфинитезимальные методы. Этот материал представляет интерес с точки зрения приложений к дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, теоретической механике, общей теории относительности.

К сожалению, по техническим причинам в сборник не удалось включить задачи по группам Ли преобразований на многообразиях со специальной структурой (движения, конформные, аффинные и проективные преобразования римановых пространств, пространств аффинной связности, расслоенных многообразий, автоморфизмы G -структур).

Для облегчения пользования задачником мы начинаем каждый параграф кратким теоретическим введением и примерами, в которых разобраны методы решения типовых задач. Большинство задач снабжены ответами или (в более трудных случаях) указаниями способа их решения.

Ссылка типа (x, y) означает, что имеется в виду задача в § x под номером y . Применяются стандартные, наиболее употребительные в литературе обозначения.

§ I. Топологические группы

Множество G называется топологической группой, если: 1) G — группа; 2) G — отделимое топологическое пространство; 3) групповые операции $f(a, b) = ab$ и $S(a) = a^{-1}$ непрерывны. Последнее означает, что если $a, b \in G$, то для всякой окрестности W элемента $c = ab$ найдутся такие окрестности $U \ni a$ и $V \ni b$, что $UV \subset W$ и для всякой окрестности V элемента a^{-1} найдется такая окрестность U элемента a , что $U^{-1} \subset V$.

Отображение $\varphi : G \rightarrow G'$ топологической группы на топологическую группу называется изоморфным, если 1) φ — групповой изоморфизм, т.е. φ взаимно однозначно и сохраняет произведение: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$; 2) φ является гомеоморфным отображением топологического пространства G на топологическое пространство G' .

Пусть a — фиксированный элемент группы. Левый и правый сдвиги $L_a x = ax$, $R_a x = xa$, а также инволюция S есть гомеоморфные отображения G на себя. Отсюда следует, что топология на группе полностью определяется заданием базы окрестностей единицы Σ_e . Последняя характеризуется следующими свойствами: а) для любых $U, V \in \Sigma_e$ существует такое $W \in \Sigma_e$, что $W \subset U \cap V$; б) пересечение всех окрестностей из Σ_e содержит лишь единицу; в) для всякого $U \in \Sigma_e$ существует $V \in \Sigma_e$ такое, что $VV \subset U$; г) для всякого $U \in \Sigma_e$ и любого $a \in U$ существует такое $V \in \Sigma_e$, что $aV \subset U$; д) для всякого $U \in \Sigma_e$ и любого $a \in G$ существует такое $V \in \Sigma_e$, что $aV a^{-1} \subset U$.

База окрестностей любого другого элемента $a \in G$ получается из Σ_e левыми (или правыми) сдвигами. Полная система окрестностей на G может быть взята в виде $\Sigma = \{aU : U \in \Sigma_e, a \in M\}$, где M — некоторое множество, всюду плотное в G : $\overline{M} = G$. Подмножество $H \subset G$ называется подгруппой топологической группы, если 1) H — подгруппа алгебраической группы: $HH \subset H$; 2) H — замкнутое подмножество топологического пространства G .

Подгруппа топологической группы есть также топологическая группа относительно индуцированной топологии. В дальнейшем, если не оговорено противное, предполагается, что H наделено указанной топологией подпространства. Подгруппа N топологической груп-

пы называется ее нормальным делителем (или инвариантной подгруппой), если $\mathcal{N}$ есть нормальный делитель абстрактной группы: $a\mathcal{N} = \mathcal{N}a$ для любого $a \in G$. Подгруппа $H \subset G$ называется дискретной, если она дискретна как топологическая группа относительно индуцированной топологии. Топологическая группа называется простой, если всякий ее нормальный делитель дискретен или совпадает с самой группой.

Центром Z топологической группы G называется множество ее центральных элементов, т.е. элементов $z \in G$, перестановочных со всеми элементами из G : $az = za$. Центр есть нормальный делитель топологической группы.

Отметим, наконец, что топологическая группа называется связной, односвязной, компактной и т.д., если она обладает этими свойствами как топологическое пространство. При выяснении топологических свойств матричных групп полезно применение некоторых мультипликативных разложений n -матриц.

1) Полярное разложение. Всякая матрица $A \in GL(n, \mathbb{C})$ может быть однозначно представлена в виде произведения $A = BU$ положительно определенной эрмитовой и унитарной матрицы. В частности, вещественная n -матрица представляется в виде произведения положительно определенной симметричной и ортогональной матрицы.

2) Разложение Грама. Пусть D^+ означает диагональную матрицу с положительными элементами, T_0 - треугольную унипотентную (с единицами на диагонали) матрицу. Тогда существует однозначное разложение $A = T_0 D^+ U$, где U унитарна.

3) Разложение Гаусса. Пусть D_i - диагональные миноры матрицы A , составленные из первых i строк и первых i столбцов. Если все $D_i \neq 0$, то матрица называется регулярной. Такая матрица может быть однозначно представлена в виде произведения $A = T_0^T D T_0$, где D - диагональная матрица, T_0 - верхняя треугольная унипотентная матрица.

Пример I. Множество $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ действительных чисел есть коммутативная группа по сложению, называемая аддитивной группой действительных чисел. Рассмотрим в $\mathbb{R}$ естественную топологию, определяемую интервалами. Она отделима. Очевидно, что в этой топологии функции $f(a, b) = a + b$ и $S(a) = -a$ непрерывны. Следовательно, $\mathbb{R}$ с естественной топологией есть топологическая группа. Аналогично $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ с естественной топологией - коммутативные топологические группы. Они называются действительной и, соответственно, комплексной n -мерной векторной группой.

Пример 2. Множество $\mathbb{R}_0$ ненулевых действительных чисел есть коммутативная группа относительно умножения. Она называется мультипликативной группой действительных чисел. В естественной топологии подпространства в $\mathbb{R}$ функции $f(a, b) = ab$ и $S(a) = \frac{1}{a}$ непрерывны. Следовательно, $\mathbb{R}_0$ с естественной топологией — топологическая группа. Аналогично, мультипликативная группа ненулевых комплексных чисел $\mathbb{C}_0$ относительно естественной топологии является коммутативной топологической группой.

Пример 3. Множество $GL(n, \mathbb{R})$ всех действительных невырожденных матриц n -порядка есть группа по умножению матриц AB . Она называется полной линейной группой. Единицей в ней является единичная матрица I , обратным элементом для A служит обратная матрица A^{-1} . При $n \geq 2$ эта группа некоммукативна. Так как каждую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix}$$

можно рассматривать как точку $(A_1^1, \dots, A_n^1, \dots, A_1^n, \dots, A_n^n)$ пространства $\mathbb{R}^{n^2}$, то $GL(n, \mathbb{R})$ есть подмножество в $\mathbb{R}^{n^2}$, определяемое условием $\det A \neq 0$. Введем в $GL(n, \mathbb{R})$ топологию подпространства, индуцированную естественной топологией $\mathbb{R}^{n^2}$. Она отделима. Такая топология называется естественной топологией этой группы. Базу окрестностей элемента $A \in GL(n, \mathbb{R})$ образуют множества

$$U(A, \varepsilon) = \{ X \in GL(n, \mathbb{R}) : |X_{\beta}^{\alpha} - A_{\beta}^{\alpha}| < \varepsilon \}.$$

Докажем, что в ней групповые операции непрерывны. Действительно, функции

$$f_{\beta}^{\alpha}(A, B) = A_{\sigma}^{\alpha} B_{\beta}^{\sigma}$$

как многочлены непрерывны как по A_{β}^{α} , так и B_{β}^{α} . Кроме того,

$$S_{\beta}^{\alpha}(A) = \frac{Ad(A_{\beta}^{\alpha})}{\det A}.$$

Но алгебраические дополнения $Ad(A_\beta^\alpha)$ элементов A_β^α в матрице A и $\det A$ есть многочлены соответственно $(\beta_n - 1)$ -й и n -й степени и потому непрерывны на $GL(n, \mathbb{R})$. Так как $\det A \neq 0$, то S_β^α также непрерывны на $GL(n, \mathbb{R})$. Таким образом, $GL(n, \mathbb{R})$ есть топологическая группа.

Аналогично, топологической группой относительно естественной топологии является полная линейная группа $GL(n, \mathbb{C})$ комплексных невырожденных n -матриц. Заметим, что группу $GL(n, \mathbb{K})$ можно естественным образом отождествить с группой $GL(V)$ линейных неособенных операторов в векторном пространстве V^n над полем $\mathbb{K}$. Отождествление производится выбором некоторого базиса.

Пример 4. Многие часто встречающиеся на практике топологические группы являются замкнутыми подгруппами в $GL(n, \mathbb{K})$, где $\mathbb{K}$ — поле комплексных или вещественных чисел. Они называются линейными или матричными группами. Основные классы линейных групп выделяются условием инвариантности некоторой билинейной формы или линейного оператора.

Пусть, например, в комплексном или в вещественном векторном пространстве V^n задана произвольная билинейная форма $\Phi(X, Y)$. В группе $GL(V)$ рассмотрим подмножество $G(\Phi)$, операторы которого оставляют эту формулу инвариантной: $\Phi(AX, AY) = \Phi(X, Y)$. Выбрав базис, мы можем записать это условие в матричном виде $A^T \Phi A = \Phi$. Подмножество $G(\Phi) \subset GL(n, \mathbb{K})$ есть группа, так как если $A, B \in G(\Phi)$, то и $AB^{-1} \in G(\Phi)$, поскольку $(AB^{-1})^T \Phi (AB^{-1}) = (B^{-1})^T \Phi B^{-1} = \Phi$. С другой стороны, $G(\Phi)$ замкнуто в $GL(n, \mathbb{K})$. Действительно, записывая условие инвариантности в координатах, получим $\Phi_{\alpha\beta} A_\rho^\alpha A_q^\beta - \Phi_{pq} = 0$. Левые части есть непрерывные функции (многочлены второго порядка от элементов A_β^α), поэтому эти уравнения выделяют замкнутое подмножество в $GL(n, \mathbb{K})$. Если форма $\Phi(X, Y)$ невырожденная, то $\det \Phi \cdot (\det A)^2 = \det \Phi$, откуда $\det A = \pm 1$. Рассмотрим некоторые частные случаи.

I) Форма $\Phi(X, Y)$ невырожденная и симметричная ($\Phi^T = \Phi$). Тогда в ортонормированном относительно этой формы базисе будем иметь

$$\Phi(X, Y) = \sum_{i=1}^p x^i y^i - \sum_{j=1}^q x^{p+j} y^{p+j} \quad (p+q=n).$$

Соответствующая топологическая подгруппа в $GL(n, \mathbb{K})$ обозначается через $O(p, q, \mathbb{K})$ и называется псевдоортогональной группой.

(В вещественном случае часто пишут $O(p, q)$). В частности, при $p=n, q=0$ это ортогональная группа $O(n, \mathbb{K}) : A^T A = I$.

2) Форма $\Phi(X, Y)$ невырожденная и кососимметричная : $(\Phi^T = -\Phi)$. Это может быть лишь в случае четной размерности $n=2m$. Тогда существует базис, в котором она приводится к виду

$$\Phi(X, Y) = \sum_{i=1}^m X^i Y^{m+i} - \sum_{i=1}^m X^{m+i} Y^i \quad \text{с матрицей } \Phi = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Линейная группа в этом случае называется симплектической и обозначается через $Sp(m, \mathbb{K})$.

В случае комплексного векторного пространства существует еще один вариант, когда форма $\Phi(X, Y)$ является эрмитовой. В ко-

ординатах $\Phi(X, Y) = \Phi_{\alpha\beta} X^\alpha \bar{Y}^\beta$. Требование ее инвариантности вы-

деляет в $GL(n, \mathbb{C})$ замкнутую подгруппу, определяемую условием $A^* \Phi A = \Phi$. В случае невырожденности формы Φ имеем $\det A \cdot \det A = 1$ и, следовательно, $|\det A| = 1$. Рассмотрим частные случаи.

Пусть форма Φ невырожденная и эрмитово симметричная : $(\Phi^* = \Phi)$. Тогда в каноническом базисе она приводится к виду

$$\Phi(X, Y) = \sum_{i=1}^p X^i \bar{Y}^i - \sum_{j=1}^q X^{p+j} \bar{Y}^{p+j}, \quad (p+q=n) \text{ с матрицей } \Phi = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

Соответствующая линейная группа обозначается через $U(p, q)$ и называется псевдоунитарной. В частности, при $p=n, q=0$ форма Φ является положительно определенной, и мы имеем унитарную группу $U(n) : A^* A = I$. Заметим, что рассмотрение кососимметрического случая не дает здесь ничего нового (почему?).

Ряд линейных групп получается при рассмотрении пересечений рассмотренных. Например, при пересечении с группой $SL(n, \mathbb{K})$, т.е. при добавочном условии $\det A = 1$, получаются группы $SO(p, q, \mathbb{K})$, $SO(n, \mathbb{K})$, $SU(p, q)$, $SU(n)$, к названиям которых добавляется слово "специальная" : специальная ортогональная группа и т.п.

Пример 5. В топологической группе $GL(n, \mathbb{R})$ рассмотрим подгруппу ортогональных матриц $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^T A = I\}$. Покажем, что $O(n, \mathbb{R})$ несвязна и состоит из двух связных компонент $SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$ и $\bar{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) : \det A = -1\}$. Так как эти компоненты топологически эк-

вивалентны ($O^-(n, \mathbb{R})$ получается из $SO(n, \mathbb{R})$ умножением на любую ортогональную матрицу второго рода), то достаточно убедиться в связности $SO(n, \mathbb{R})$. Для этого достаточно показать, что для любой $A \in SO(n, \mathbb{R})$ найдется непрерывный путь $A(t)$ на группе такой, что $A(1) = A$, $A(0) = I$. Пусть A — ортогональная матрица первого рода. Внутренний автоморфизм $A' = B A B^{-1}$, где $B \in SO(n, \mathbb{R})$, является топологическим преобразованием, при котором единица остается неподвижной. Как известно из линейной алгебры, матрицу B можно выбрать так, чтобы A' стала канонической матрицей вида ($i = 1, \dots, s$)

$$A' = \begin{bmatrix} A'_1 & & & 0 \\ & A'_s & & \\ & & I_\kappa & \\ 0 & & & -I_m \end{bmatrix}, \quad A'_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix},$$

где I_κ — единичный блок размера κ . Рассмотрим непрерывное однопараметрическое семейство (путь) ортогональных матриц первого рода $A(t)$, заменив здесь углы α_i на $t\alpha_i$. Этот путь связывает матрицу $A' = A(1)$ с матрицей $\begin{pmatrix} I_{2s+\kappa} & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix}$. Но так как

$\det A = \det A' = 1$ и, следовательно, m — четно, то эту матрицу можно соединить путем с единицей, заменив блок $-I_m$ на $\frac{m}{2}$ блоков $-\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Тогда при $t=0$ получаем указанную матрицу,

а при $t=\pi$ — единичную. Это доказывает, что $SO(n, \mathbb{R})$ линейно связна и, следовательно, связна. Наконец заметим, что $O(n, \mathbb{R})$ не связна, так как если $\det A = -1$, то эту матрицу нельзя соединить путем с единичной матрицей в силу непрерывности функции $\det A(t)$.

Группа $O(n)$ компактна. В самом деле, из условия ортого-

нальности $\sum_{\beta} A_{\alpha}^{\beta} A_{\beta}^{\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$, полагая $\alpha = \beta$ и суммируя по α ,

получим $\sum_{(\beta, \alpha)} (A_{\alpha}^{\beta})^2 = n$.

Это значит, что множество элементов группы принадлежит гиперсфере радиуса $\sqrt{n}$ пространства $\mathbb{R}^{n^2}$ и, следовательно, ограничено.

Пример 6. Группа $\mathbb{C}_0$ ненулевых комплексных чисел по умножению является топологической, поскольку операции z_1, z_2 и $\frac{1}{z}$ непрерывны в естественной топологии. Она гомеоморфна плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ с выколотой точкой и поэтому связна, но не односвязна.

Пример 7. Найдем все замкнутые подгруппы в аддитивной топологической группе $\mathbb{R}$ (пример I). Оказывается, что каждая из них либо совпадает с $\mathbb{R}$, либо есть дискретная подгруппа, образованная целыми кратными некоторого числа $\alpha > 0$. В самом деле, если $H \subset \mathbb{R}$ не дискретна, то для $\forall \varepsilon > 0$ существует точка $\alpha \in H$ из интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Значит, H всюду плотно в $\mathbb{R}$ и поэтому $H = \overline{H} = \mathbb{R}$. Если же $H \subset \mathbb{R}$ дискретна и $\alpha \in H$ наименьшее из положительных чисел, принадлежащее H , то все $m\alpha \in H$ для любого целого $m \in \mathbb{Z}$. Докажем, что H исчерпывается такими числами. Пусть $a \in H$. Положим $m = \left[\frac{a}{\alpha} \right]$ (целая часть числа $\frac{a}{\alpha}$). Тогда $a \in H, m\alpha \in H$, откуда $a - m\alpha \in H$. С другой стороны, $0 \leq a - m\alpha < \alpha$. Но по определению $\alpha = \min \{ \alpha \in H, \alpha > 0 \}$. Поэтому $a - m\alpha = 0$ и, следовательно, $a = m\alpha$. Легко видеть, что H замкнута в $\mathbb{R}$.

Пример 8. При нахождении центра линейной группы полезно использовать лемму Шура о том, что если $\mathcal{O}$ неприводимое множество операторов комплексного векторного пространства (т.е. $\mathcal{O}$ не имеет неприводимых подпространств), то коммутирующие с $\mathcal{O}$ линейные операторы скалярны, т.е. имеют вид $A = \lambda I$. Отсюда, например, сразу вытекает, что центр группы $GL(n, \mathbb{C})$ — множество скалярных матриц. Значит, Z изоморфен $\mathbb{C}_0$.

Пример 9. Группа $GL(n, \mathbb{R})$ некомпактна, но локально компактна. Действительно, отображение $\varphi : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ вида $\varphi(A) = \det A$ непрерывно. Поэтому $\varphi^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ есть замкнутое подмножество, а подмножество $GL(n, \mathbb{R})$ открыто в $\mathbb{R}^{n^2}$ и, следовательно, некомпактно. Однако оно локально компактно, поскольку каждая точка открытого множества в $\mathbb{R}^{n^2}$ имеет компактную окрестность.

Аналогично, группа $GL(n, \mathbb{C})$ локально компактна.

I.1. Доказать, что третье условие в определении топологической группы равносильно требованию непрерывности операции $\alpha, \beta \rightarrow \alpha\beta^{-1}$.

I.2. Доказать следующие соотношения:

$$L_\alpha \circ L_\beta = L_{\alpha\beta} \quad ; \quad L_\alpha^{-1} = L_{\alpha^{-1}} \quad ; \quad R_\alpha \circ R_\beta = R_{\beta\alpha} \quad ;$$

$$R_a^{-1} = R_{a^{-1}} \quad ; \quad L_a \circ R_b = R_b \circ L_a$$

I.3. Пусть G является группой и топологическим пространством. Известно, что а) левые сдвиги являются непрерывными преобразованиями G , б) инверсия $S(a) = a^{-1}$ является непрерывным преобразованием в G . Доказать, что G является топологической группой.

I.4. Доказать, что всякая топологическая группа однородна в том смысле, что для любых $a, b \in G$ найдется топологическое отображение, преобразующее a в b .

I.5. Пусть $S(a) = a^{-1}$ инверсия на топологической группе. Доказать, что $R_a \circ S = S \circ L_a$.

I.6. Доказать: 1) Если $U \ni e$ — окрестность единицы, то $S(U) = U^{-1}$ также окрестность единицы. 2) Всякая окрестность единицы U содержит ее симметричную окрестность V , удовлетворяющую условию $V^{-1} = V$. 3) Всякая окрестность $U \ni e$ содержит окрестность V единицы такую, что $VV \subset U$.

I.7. Доказать, что пространство всякой топологической группы регулярно.

I.8. Показать, что $GL(n, \mathbb{C})$ есть топологическая группа относительно метрики $\|A - B\|$, где $\|A\| = \sqrt{(A, A)}$, а скалярное произведение n -матриц определено формулой $(A, B) = \text{tr}(AB^*)$.

I.9. Пусть G — топологическая группа, Σ_e — база окрестностей единицы и $M \in G$ — плотное в G множество. Тогда система $\Sigma = \{aU : U \in \Sigma_e, a \in M\}$ является базой в G . Доказать.

I.10. Построить счетную базу для топологической группы $GL(n)$ действительных или комплексных n -матриц.

I.11. Группа G называется циклической, если каждый ее элемент является степенью какого-либо элемента a группы. Рассмотрим циклическую группу третьего порядка $\{e, a, a^2\}$ с топологией, определяемой системой открытых множеств $\emptyset, \{e\}, \{a\}, \{e, a\}, G$. Будет ли G топологической группой?

I.12. Пусть $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел и p — простое число. Обозначим через U_k множество всех чисел, делящихся на p^k ($k = 1, 2, \dots$). Доказать, что система множеств $\{U_k\}$ образует базу окрестностей нуля. Доказать также, что если $p \neq q$ — два простых числа, то определяемые ими топологии различны.

I.13. Пусть $F \subset G$ — замкнутое множество топологической группы, и $a \in G$ — некоторый ее элемент. Тогда множества aF, Fa, F^{-1} замкнуты. Доказать.

I.14. Пусть $U \subset G$ — открытое множество (область) топологической группы и M — произвольное множество. Тогда множества MU, UM, U^{-1} открыты. Доказать.

I.15. Пусть $M \subset G$ — связное подмножество топологической группы. Доказать, что подмножества aM, Ma, M^{-1}, aMa^{-1} также связны при любом выборе $a \in G$.

I.16. Если M и K — связные подмножества топологической группы, то множество MK связно. Доказать.

I.17. Пусть A и B — компактные подмножества топологической группы. Доказать, что множества AB, A^{-1} компактны.

I.18. Доказать, что любой элемент связной топологической группы G может быть представлен в виде конечного произведения $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_k$ элементов из произвольной окрестности единицы U (теорема Шрейера).

I.19. Показать, что группа $SL(2, \mathbb{R})$ гомеоморфна произведению $S^1 \times D$, где D — единичный круг.

I.20. Доказать, что группа $SL(2, \mathbb{R})$ гомеоморфна произведению $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

I.21. Доказать, что группа $GL(n, \mathbb{C})$ гомеоморфна произведению $U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

I.22. Пусть G — топологическая группа матриц $\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}$ и G^1 — топологическая группа матриц $\begin{pmatrix} e^x & y \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

Являются ли они изоморфными?

I.23. Пусть $\mathbb{R}$ — аддитивная группа действительных чисел с естественной топологией и $\mathbb{R}'$ — аддитивная группа действительных чисел с дискретной топологией. Являются ли они изоморфными? Изоморфны ли группы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^+$?

I.24. Показать, что множество $T_0(2, \mathbb{R})$ матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$ есть топологическая группа, изоморфная аддитивной группе $\mathbb{R}$.

I.25. Пусть V — n -мерное действительное или комплексное векторное пространство. Показать, что множество $GL(V)$ всех неособенных линейных операторов в V есть топологическая группа, изоморфная группе $GL(n, \mathbb{R})$ или $GL(n, \mathbb{C})$ соответственно.

I.26. Показать, что специальная унитарная группа $SU(2)$ изоморфна группе комплексных 2-матриц вида $A = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$, $\det A = 1$.

I.27. Показать, что группа $SL(2, \mathbb{R})$ изоморфна $Sp(1, \mathbb{R})$.

I.28. Доказать, что ортогональная симплектическая группа $Sp(m, \mathbb{R}) \cap O(2m, \mathbb{R})$ изоморфна унитарной.

I.29. Доказать, что группа $U(1)$ изоморфна $SO(2)$.

I.30. Пусть G — топологическая группа и $G_e \subset G$ — связная компонента единицы. Тогда G_e — нормальный делитель и всякая связная компонента в G топологически эквивалентна G_e . Доказать.

I.31. Найти связную компоненту единицы псевдоортогональной группы $O(1, 1)$.

I.32. Пусть G — топологическая группа и $M \subset G$ — произвольное множество. Доказать, что множество элементов из G , перестановочных с элементами из M , является замкнутой подгруппой в G .

I.33. Пусть $H \subset G$ — замкнутая подгруппа в G и $K \subset H$ — замкнутая подгруппа в H . Доказать, что K — замкнутая подгруппа в G .

I.34. Пусть H — коммутативная (абстрактная) подгруппа топологической группы G . Доказать, что ее замыкание $\bar{H}$ есть коммутативная замкнутая подгруппа.

I.35. Доказать, что если N абстрактная подгруппа или нормальный делитель в топологической группе G , то замыкание $\bar{N}$ есть подгруппа и, соответственно, нормальный делитель этой группы.

I.36. В аддитивной топологической группе $\mathbb{R}^2$ рассмотрим множество H точек с целочисленными координатами и прямую N с угловым коэффициентом α . Выяснить, являются ли H и N нормальными делителями в топологической группе. При каких α множество $H + N$ замкнуто? Будет ли в этом случае оно нормальным делителем в $\mathbb{R}^2$?

I.37. Пусть H_1 и H_2 — подгруппы топологической группы G . Является ли подгруппой в G их пересечение $H = H_1 \cap H_2$?

I.38. Являются ли подгруппами топологической группы $\mathbb{R}^1$:
1) множество целых чисел $\mathbb{Z}$; 2) множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$?

I.39. Доказать, что всякая дискретная подгруппа топологической группы замкнута.

I.40. Доказать, что всякая открытая подгруппа $H \subset G$ топологической группы замкнута.

I.41. Доказать, что центр топологической группы является ее нормальным делителем.

I.42. Доказать, что замкнутая подгруппа центра $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}$ является нормальным делителем топологической группы. (Она называется центральным нормальным делителем).

I.43. Доказать, что всякий дискретный нормальный делитель $\mathcal{N}$ связной топологической группы является ее центральным нормальным делителем.

I.44. Найти все дискретные нормальные делители в группе $O(n, \mathbb{R})$.

I.45. Показать, что $\mathbb{R}^n$ есть замкнутый нормальный делитель в группе $\mathbb{C}^n$.

I.46. Пусть $D(n, \mathbb{R})$ – множество невырожденных диагональных n -матриц. Является ли оно подгруппой в топологической группе $GL(n, \mathbb{R})$? Нормальным делителем?

I.47. Пусть $T(n, \mathbb{R})$ – множество всех невырожденных верхних треугольных n -матриц. Является ли оно подгруппой в $GL(n, \mathbb{R})$? Нормальным делителем?

I.48. Доказать, что

$$1) SU(p, q) \cap U(p+q) = S(U_p \times U_q) \quad ; \quad 2) Sp(n, \mathbb{C}) \cap U(2n) = U(2n).$$

I.49. Доказать, что

$$1) SO(2n) \cap Sp(n) = U(n) \quad ; \quad 2) Sp(n, \mathbb{R}) \cap U(2n) = U(n).$$

I.50. Показать, что подмножество матриц $SL(n, \mathbb{K}) \subset GL(n, \mathbb{K})$ с определителем, равным единице, есть топологическая подгруппа.

I.51. Показать, что

- 1) $GL(n, \mathbb{R})$ есть топологическая подгруппа в $GL(n, \mathbb{C})$;
2) подмножество $GL^+(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$ n -матриц с положительным определителем есть связная топологическая подгруппа в $GL(n, \mathbb{R})$; 3) $\mathbb{R}^n$ есть топологическая подгруппа в $\mathbb{C}^n$.

I.52. Пусть $\varphi(X, Y)$ – кососимметричная билинейная форма в $\mathbb{R}^2$. Доказать, что группа инвариантности этой формы есть $SL(2, \mathbb{R})$.

I.53. Показать, что множества диагональных n -матриц $D(n, \mathbb{C})$ и $D^+(n, \mathbb{R})$ есть связные, коммутативные, замкнутые подгруппы в $T(n, \mathbb{C})$ и $T(n, \mathbb{R})$ соответственно. Является ли связной подгруппа $D(n, \mathbb{R}) \subset T(n, \mathbb{R})$?

I.54. Исследовать топологическое строение группы $O(2)$.

I.55. Доказать, что топологические группы: 1) $T(n, \mathbb{C})$ комплексных треугольных матриц, 2) $T_0(n, \mathbb{K})$ – унипотентных вещественных или комплексных треугольных матриц связны.

I.56. Показать, что группа $T(n, \mathbb{R})$ вещественных верхних треугольных матриц ($A_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha > \beta$) состоит из 2^n связных компонент.

I.57. Показать, что группа $SL(n, \mathbb{R})$ – связная топологическая группа.

I.58. Доказать, что группы 1) $U(n)$; 2) $SU(n)$; 3) $U(p, q)$ связны.

I.59. Доказать связность топологических групп $SO(n, \mathbb{K})$, $Sp(n, \mathbb{K})$.

I.60. Доказать, что топологические группы 1) $GL(n, \mathbb{C})$; 2) $SL(n, \mathbb{C})$ связны.

I.61. Показать, что группы $GL(n, \mathbb{R})$ и $O(n, \mathbb{R})$ состоят из двух связных компонент.

I.62. Доказать, что группа $O(1, n)$ состоит из четырех связных компонент.

I.63. Доказать, что матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & x^1 & x^3 \\ 0 & 1 & x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ образуют топологическую группу и найти ее центр.

I.64. Найти центры следующих групп: 1) $O(2)$; 2) $SO(2)$.

I.65. Найти центр группы $GL(n, \mathbb{R})$.

I.66. Найти центр группы $SU(n)$.

I.67. Найти центр группы $SL(n, \mathbb{C})$.

I.68. Найти центры следующих групп: 1) $SO(2n+1)$; 2) $SO(2n)$; 3) $Sp(n)$.

I.69. Доказать, что если топологическая группа компактна и дискретна, то она конечна.

§ 2. Группы Ли

Группа Ли – это аналитическое многообразие, являющееся одновременно группой. Кроме того, требуется, чтобы эти две структуры были согласованы в том смысле, что групповая операция $f(a, b) = ab$ является аналитической.

Группы Ли G и G' называются изоморфными, если существует аналитический диффеоморфизм $\varphi : G \rightarrow G'$, сохраняющий операцию умножения: $\varphi(ab) = \varphi(a) \varphi(b)$. Если $\varphi(ab) = \varphi(b) \varphi(a)$, то говорят об антиизоморфизме. Это различие не является существенным, ибо композиция $S \circ \varphi$ есть обычный изоморфизм.

Любая группа Ли является топологической группой относительно топологии, индуцированной ее аналитической структурой. Более того, всякая группа Ли локально компактна. Это следует из того, что всякое многообразие локально евклидово. Обратно, на всякой локально евклидовой топологической группе существует аналитическая структура, превращающая ее в группу Ли.

Пусть $(\mathcal{U}, \psi)$ — карта единичного элемента e группы Ли и α^i — координата точки $\alpha \in \mathcal{U}$ ($i=1, \dots, z$). Тогда в этой окрестности групповые операции можно записать в координатах. Если $c=\alpha\beta$ и $\alpha, \beta, c \in \mathcal{U}$, то $c^i = f^i(\alpha^1, \dots, \alpha^z, \beta^1, \dots, \beta^z)$

есть аналитические функции своих аргументов. Функции $f^i(\alpha, \beta)$ называются групповыми функциями. Они удовлетворяют очевидным соотношениям

$$f^i(\alpha, e) = \alpha^i, \quad f^i(e, \beta) = \beta^i, \quad \left. \frac{\partial f^i}{\partial \alpha^j} \right|_e = \left. \frac{\partial f^i}{\partial \beta^j} \right|_e = \delta_j^i.$$

При этом карту $(\mathcal{U}, \psi)$ можно всегда выбрать так, чтобы единица группы имела нулевые координаты.

Пусть G — группа Ли. Подмножество $H \subset G$ называется подгруппой Ли, если H есть одновременно подгруппа и аналитическое подмногообразие в G . Топология H совпадает с индуцированной топологией. Всякая замкнутая подгруппа в G есть подгруппа Ли.

Подгруппа $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ называется алгебраической группой, если она является алгебраическим многообразием в матричном пространстве $M(n, \mathbb{K}) \sim \mathbb{K}^{n^2}$. Это значит, что она может быть задана системой полиномиальных уравнений $P_\alpha(A_j^i) = 0$. В силу непрерывности функций P_α , алгебраическая группа замкнута в $GL(n, \mathbb{K})$ и является поэтому подгруппой Ли.

Всякая комплексная группа Ли G комплексной размерности $2z$ может рассматриваться как вещественная группа Ли вещественной размерности $2z$. При этом комплексно-аналитические групповые функции $f^i(\alpha, \beta)$ порождают вещественно-аналитические групповые функции на вещественной реализации. Последняя обозначается через $G^{\mathbb{R}}$.

Пример I. Рассмотрим топологическую группу $GL(n, \mathbb{R})$. Каждую матрицу $A \in GL(n, \mathbb{R})$ можно рассматривать как точку в $\mathbb{R}^{n^2}$ с координатами (A_{β}^{α}) , упорядоченными некоторым образом. При этом должно быть выполнено условие $\det(A_{\beta}^{\alpha}) \neq 0$. Следовательно, $GL(n, \mathbb{R})$ есть открытое множество и является поэтому открытым многообразием в $\mathbb{R}^{n^2}$ с индуцированной топологией. В этих

координатах групповое умножение определяется аналитическими функциями $C_{\beta}^{\alpha} = A_{\delta}^{\alpha} B_{\beta}^{\delta}$ от координат обоих сомножителей. Следовательно, $GL(n, \mathbb{R})$ — группа Ли.

Указанный способ введения координат на $GL(n, \mathbb{R})$ не является единственно возможным. Можно ввести координаты, полагая $\psi(A) = (\delta_{\beta}^{\alpha} + X_{\beta}^{\alpha})$. При такой параметризации группы единичная матрица будет иметь нулевые координаты, а закон умножения запишется в виде

$$Z_{\beta}^{\alpha} = X_{\beta}^{\alpha} + Y_{\beta}^{\alpha} + X_{\delta}^{\alpha} Y_{\beta}^{\delta}.$$

Пример 2. Аналогичным образом аналитическая структура группы Ли вводится на группе $GL(n, \mathbb{C})$. Рассмотрим ее о веществление. Для этого ее удобно рассматривать как группу линейных операторов в комплексном V^n . С помощью отображения $Z = x + iy \rightarrow (x, y) \in V^n$ реализуется в виде вещественного векторного пространства V^{2n} . Положив $A = A_1 + iA_2$, получим $x' + iy' = (A_1 + iA_2)(x + iy)$, откуда $x' = A_1 x - A_2 y$, $y' = A_2 x + A_1 y$. Таким образом, группа $GL(n, \mathbb{C})$ реализуется в виде подгруппы вещественных $2n$ -матриц вида $\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}$ в $GL(2n, \mathbb{R})$.

Пример 3. Вещественная ортогональная группа была введена в § I, пр. 6 как топологическая подгруппа в $GL(n, \mathbb{R})$, определенная условием $A^T A = I$. В координатах $A = (A_{\beta}^{\alpha})$ это дает поли-

номиальные уравнения $F_{\alpha\beta}(A) = \sum_{\delta=1}^n A_{\alpha}^{\delta} A_{\beta}^{\delta} - \delta_{\alpha\beta} = 0$, где можно

считать $\alpha \leq \beta$. Левые части этих уравнений — аналитические функции. Вычислим ранг якобиевой матрицы $(\partial F_{\alpha\beta} / \partial A_{\tau}^{\delta})$. При этом достаточно знать его значение в единице группы. Учитывая, что

$$\partial A_{\beta}^{\alpha} / \partial A_{\tau}^{\delta} = \delta_{\delta}^{\alpha} \delta_{\beta}^{\tau}, \quad \text{получим} \quad \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial A_{\tau}^{\delta}} = \delta_{\alpha}^{\tau} A_{\beta}^{\delta} + \delta_{\beta}^{\tau} A_{\alpha}^{\delta}.$$

В единице группы $A_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}$ это будет равно $\delta_{\alpha}^{\tau} \delta_{\beta}^{\delta} + \delta_{\beta}^{\tau} \delta_{\alpha}^{\delta}$

и, следовательно, равно 2 или 1, если $(\tau, \delta) = (\alpha, \beta)$ и нулю, если $(\tau, \delta) \neq (\alpha, \beta)$. Отсюда вытекает, что минор порядка $\frac{n(n+1)}{2}$.

матрицы $(\partial F_{\alpha\beta} / \partial A_{\gamma}^{\delta})|_{A=I}$ при $\alpha \leq \beta, \gamma \leq \delta$ отличен от нуля.

Это значит, что $O(n)$ есть подмногообразие в $GL(n, \mathbb{R})$ размерности $\frac{n(n-1)}{2}$.

Пример 4. Многие важные в приложениях группы Ли связаны с кватернионами. Последние образуют унитарную ассоциативную алгебру $\mathbb{H}$ 4-го порядка с базисом $\{1, i, j, \kappa\}$ и структурными уравнениями $ij = -ji = \kappa$, $j\kappa = -\kappa j = i$, $\kappa i = -i\kappa = j$, $i^2 = j^2 = \kappa^2 = -1$. Всякий кватернион можно рассматривать как вектор 4-мерного пространства $\mathbb{R}^4$ вида $x = x^0 + x^1 i + x^2 j + x^3 \kappa$. $\mathbb{H}$ является, следовательно, аддитивной группой Ли. Закон их умножения как элементов алгебры определяется структурными уравнениями. Кватернион $\bar{x} = x^0 - x^1 i - x^2 j - x^3 \kappa$ называется сопряженным. Нетрудно подсчитать, что $x\bar{x} = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \geq 0$ — вещественное неотрицательное число. Число $|x| = \sqrt{x\bar{x}}$ называется модулем кватерниона. Если $|x| \neq 0$, то существует обратный кватернион, определяемый

условием $x\bar{x}^{-1} = 1$ и равный $x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}$. Отсюда следует, что

множество ненулевых кватернионов $\mathbb{H}_0$ образует мультипликативную группу. Эта группа является открытым подмногообразием в $\mathbb{R}^4$ и, следовательно, группой Ли.

Кватернионы удобно записывать с помощью комплексных чисел. Полагая $z = x^0 + x^1 i$, $w = x^2 + x^3 i$, получим $x = z + w j$. Учитывая, что $jz = \bar{z}j$, закон умножения кватернионов x и $\alpha = p + qj$ можно записать в следующем виде:

$$x\alpha = (zp - w\bar{q}) + (w\bar{p} + zq)j.$$

В частности $x\bar{x} = z\bar{z} + w\bar{w}$.

Так как $|x\alpha| = |x||\alpha|$, то кватернионы единичного модуля образуют подгруппу в $\mathbb{H}_0$. С другой стороны, уравнение $|x|^2 = z\bar{z} + w\bar{w} = 1$ определяет в $\mathbb{R}^4$ гиперсферу S^3 единичного радиуса. Это значит, что S^3 является подгруппой Ли в $\mathbb{H}_0$.

Полезно представление кватернионов с помощью комплексных 2-матриц. Для этого рассмотрим преобразование правого сдвига $x \rightarrow x\alpha = x'$ в $\mathbb{H}_0$. Используя комплексную форму записи, представим его как преобразование в $\mathbb{C}_2$:

$$z' = zp - w\bar{q}, \quad w' = zq + w\bar{p}$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} p & -\bar{q} \\ q & \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^0 + \alpha^1 i & -\alpha^2 + \alpha^3 i \\ \alpha^2 + \alpha^3 i & \alpha^0 - \alpha^1 i \end{pmatrix}.$$

Соответствие $\alpha \rightarrow A$ взаимно однозначно и сохраняет произведение. Заметим также, что $\det A = |\alpha|^2$. В частности, ограничение на кватернионы единичного модуля дает представление группы S^3 группой Ли унитарных матриц $SU(2)$. Легко видеть, что это представление является антиизоморфным.

2.1. Пусть G — группа Ли. Показать, что преобразования левого и правого сдвига являются аналитическими.

2.2. Пусть $S(\alpha) = \alpha^{-1}$ — инволюция на группе Ли. Доказать, что $S_* = -R_* \alpha \circ L_* \alpha$ (звездочка внизу означает дифференциал).

2.3. Доказать, что на группе Ли отображение $\alpha \rightarrow S(\alpha) = \alpha^{-1}$ аналитично.

2.4. Всякая вещественная или комплексная группа Ли локально связна и локально компактна. Доказать.

2.5. Доказать, что группа Ли связна тогда и только тогда, когда она линейно связна.

2.6. Доказать, что многообразие всякой группы Ли паракомпактно.

2.7. Связная компонента единицы в группе Ли сама является группой Ли. Все связные компоненты группы Ли диффеоморфны. Доказать.

2.8. Является ли группой Ли множество калибровочных преобразований векторного потенциала в классической электродинамике $A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \varphi$, где $\varphi(x)$ скалярные функции?

2.9. Аналитическая структура на группе $GL(V)$ линейных операторов векторного пространства определяется выбором базиса с помощью изоморфизма $GL(V) \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$. Показать, что она не зависит от выбора базиса.

2.10. Пусть A — линейный оператор векторного пространства V и G — группа всех операторов, перестановочных с A . Доказать, что G — алгебраическая группа.

2.11. Найти группу $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ инвариантности аффинора с мат-

цей
$$I_{m, n-m} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_{n-m} \end{pmatrix}.$$

2.12. Пусть $P(x)$ – полином на векторном пространстве V^n . Доказать, что группа G линейных операторов, для которых $P(x)$ является инвариантом, т.е. $P(Ax) = P(x)$, есть алгебраическая группа.

2.13. Пусть V^2 – действительное векторное пространство и α – иррациональное число. Показать, что группа линейных операторов, матрицы которых в заданном базисе имеют вид $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^\alpha \end{pmatrix}, x > 0$ есть группа Ли, но эта группа не является алгебраической.

2.14. Доказать, что пересечение алгебраических групп есть алгебраическая группа.

2.15. Рассмотрев вещественную реализацию $\gamma: GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow GL(2n, \mathbb{R})$ комплексной матричной группы, показать, что

$$\det(\gamma(A)) = |\det A|^2$$

2.16. Найти вещественные размерности групп Ли:

- 1) $O(n, \mathbb{C})$; 2) $SL(n, \mathbb{C})$; 3) $U(n)$; 4) $SU(n)$;
5) $GL(n, \mathbb{R})$; 6) $SL(n, \mathbb{R})$; 7) $O(n, \mathbb{R})$,

2.17. Доказать, что группа $T(n, \mathbb{C})$ комплексных треугольных матриц

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ 0 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n^n \end{pmatrix}$$

есть связная группа Ли.

2.18. Показать, что группа Ли C_0 диффеоморфна $S^1 \times \mathbb{R}_+$.

2.19. Показать, что многообразие мультипликативной группы кватернионов $\mathbb{H}_0$ диффеоморфно прямому произведению $\mathbb{R}^+ \times S^3$.

2.20. Доказать, что: 1) группа $U(n)$ диффеоморфна $S^1 \times SU(n)$; 2) $O(n)$ диффеоморфна $SO(n) \times \mathbb{Z}_2$; 3) $SL(2, \mathbb{C})$ диффеоморфна $SU(2) \times \mathbb{R}^3$.

2.21. Показать, что $SU(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) \cap \mathbb{H}$.

2.22. Пусть G группа линейных преобразований векторного пространства над телом кватернионов, сохраняющих кватернионную эрмитову форму $(p, q) = p_1 \bar{q}_1 + \dots + p_m \bar{q}_m$.

Доказать, что она изоморфна унитарной симплектической группе

$$Sp(m) = Sp(m, \mathbb{C}) \cap U(2m)$$

2.23. Найти центр мультипликативной группы кватернионов $\mathbb{H}_0$.

2.24. Показать, что группы Ли с законом умножения
 1) $ab = (a + b e^{-a^2}, a^2 + b^2)$, 2) $\tilde{a}\tilde{b} = (\tilde{a} + \tilde{a}^2 \tilde{b}^1, \tilde{a}^2 \tilde{b}^2)$
 изоморфны.

2.25. Пусть $\mathcal{C}\ell$ - алгебра двойных чисел $\alpha = x + ey$, $x, y \in \mathbb{R}$, $e^2 = 1$. Найти группу Ли обратимых элементов этой алгебры.

2.26. Доказать, что симплектическая группа $Sp(m, \mathbb{R})$ является группой Ли. Найти ее размерность.

2.27. Параметризовать группу вращений $SO(3, \mathbb{R})$ углами Эйлера, представив вращение $A \in SO(3, \mathbb{R})$ как композицию трех вращений: вращения $A(\varphi)$ вокруг оси Z на угол φ , вращения $B(\theta)$ вокруг оси X' и вращения $C(\psi)$ вокруг оси Z' . Используя этот результат, показать, что группа $SO(3)$ связна.

2.28. Параметризовать группу собственных псевдоевклидовых вращений в псевдоевклидовом пространстве $E_{2,1}^3$ аналогами углов Эйлера.

2.29. Центризатором элемента α группы G называется множество всех ее элементов, перестановочных с α : $\alpha x = x \alpha$. В группе $GL(n, \mathbb{R})$ найти центризатор элемента $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, если: а) все λ_i различны; б) $\lambda_i = \lambda$ ($i \leq m < n$), $\lambda_j = \mu$ ($j > m$).

2.30. Пусть H и G - связные группы Ли и $H \subset G$. Тогда тождественное отображение $id: H \rightarrow G$ есть алгебраический изоморфизм. Доказать, что если он непрерывен, то H - подгруппа Ли в G .

2.31. Пусть $\xi \subset \mathbb{P}^n$ - гиперплоскость проективного пространства. Область $A^n = \mathbb{P}^n \setminus \xi$ называется n -мерным аффинным пространством. Доказать, что подгруппа $GA(n) \subset GP(n, \mathbb{R})$, переводящая A^n в себя, есть подгруппа Ли, изоморфная группе матриц $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\alpha \in \mathbb{R}^n$, $A \in GL(n, \mathbb{R})$ (аффинная группа). Найти ее размерность.

2.32. Доказать, что $GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A > 0\}$ есть подгруппа Ли в $GL(n, \mathbb{R})$.

2.33. Доказать, что унитарная группа $U(n)$ является подгруппой Ли в $GL(n, \mathbb{C})$.

2.34. Является ли подгруппой Ли в $GL(n, \mathbb{R})$ подмножество матриц с рациональными определителями?

2.35. Какие из следующих групп являются подгруппами Ли в $GL(n, \mathbb{R})$: 1) $SL(n, \mathbb{R})$; 2) $D_0(n, \mathbb{R})$; 3) $GL(n, \mathbb{Q})$?
 Определить их размерности.

2.36. Показать, что следующие подмножества являются подгруппами Ли: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; $\mathbb{R}_0 \subset \mathbb{C}_0$; $GL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{C})$; $SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$; $SL(n, \mathbb{R}) \subset SL(n, \mathbb{C})$.

2.37. Показать, что следующие множества матриц образуют подгруппы Ли в $U(n, 1)$:

$$1) A = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad A_1 \in U(n);$$

$$2) A = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad A_1 \in U(n-1).$$

2.38. Выяснить, какие из следующих множеств в $GL(n, \mathbb{R})$ являются подгруппами Ли или нормальными делителями: 1) множество невырожденных диагональных матриц; 2) множество невырожденных верхних треугольных матриц $T(n, \mathbb{R})$; 3) множество симметричных матриц.

2.39. Показать, что множество $\mathcal{N}$ матриц вида $\begin{pmatrix} I_p & A \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, где A — $(p \times q)$ -матрица, образуют коммутативный нормальный делитель группы $T_0(n, \mathbb{R})$.

2.40. Умножение в $\mathbb{R}^3$ определено формулой $ab = (\alpha^1 + b^1 \cos \alpha^3 - b^2 \sin \alpha^3, \alpha^2 + b^1 \sin \alpha^3 + b^2 \cos \alpha^3, \alpha^3 + b^3)$. Показать, что при этом получается группа Ли. Каковы координаты единицы? Найти центр группы.

2.41. Найти подгруппу Ли $\mathcal{G}$ линейных операторов в V^{n+1} , оставляющих инвариантной квадратичную форму

$$\varphi(X, X) = \sum_{\alpha=1}^n (\lambda^\alpha)^2 + \lambda (X^{n+1})^2, \quad \lambda \neq 0.$$

2.42. Доказать, что группа Ли $SU(1, 1)$ состоит из 2-матриц $\begin{bmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}$, $z, w \in \mathbb{C}$ и изоморфна группе $SL(2, \mathbb{R})$.

2.43. Пусть A — линейный оператор в пространстве кватернионов, обладающий свойством $|Aq| = |q|$. Доказать, что множество таких операторов образует группу Ли, изоморфную $Sp(m)$.

2.44. Доказать, что группа $SU(2)$ диффеоморфна сфере S^3 и потому компактна.

2.45. Доказать, что группа $SO(3)$ диффеоморфна трехмерному проективному пространству $\mathbb{R}P^3$ и, следовательно, компактна.

2.46. Компактны ли следующие группы: $SO(n, \mathbb{R})$; $U(n)$; $SU(n)$; $O(n, \mathbb{C})$?

2.47. Компактны ли группы Ли: $O(p, q)$; $SL(2, \mathbb{C})$?

2.48. Доказать, что симплектическая унитарная группа Ли $Sp(m) = Sp(m, \mathbb{C}) \cap U(2m)$ компактна. Найти ее размерность.

2.49. Показать, что следующие группы Ли являются компактными подгруппами Ли в $SO(4) : U(2)$; $SU(2)$; $SO(3)$; $SO(2)$; $SO(2) \times SO(2)$. Определить их размерность.

§ 3. Алгебры Ли

Векторное пространство $\mathfrak{g}$ называется алгеброй Ли, если в нем задан коммутатор – билинейное отображение $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $[u, v] = -[v, u]$; 2) $[[u, v], w] + [[w, u], v] + [[v, w], u] = 0$, для любых $u, v, w \in \mathfrak{g}$. Второе соотношение называется тождеством Якоби. Если $[u, v] = 0$ для любых $u, v \in \mathfrak{g}$, то алгебра Ли называется коммутативной.

Две алгебры Ли над одним и тем же полем называются изоморфными, если существует линейный изоморфизм $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$, сохраняющий коммутатор, т.е. $\varphi [u, v] = [\varphi u, \varphi v]$.

Пусть $\{e_i\}$ – базис конечномерной алгебры Ли. Разлагая коммутаторы $[e_i, e_j]$ по этому же базису, получим соотношения

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^{\kappa} e_{\kappa}, \quad (I)$$

которые называются структурными уравнениями алгебры Ли, а числа

C_{ij}^{κ} – структурными константами. Тогда вычисление коммутатора произвольной пары векторов может быть произведено по формуле

$$[X, Y] = C_{ij}^{\kappa} X^i Y^j e_{\kappa}. \quad \text{В силу свойств коммутатора структурные}$$

константы должны удовлетворять следующим условиям:

$$C_{ij}^{\kappa} = -C_{ji}^{\kappa}, \quad C_{ij}^s C_{sk}^m + C_{ki}^s C_{sj}^m + C_{jk}^s C_{si}^m = 0. \quad (2)$$

Совокупность структурных констант образует тензор.

Если алгебры Ли изоморфны, то выбирая в них базисы и полагая $\varphi e_i = \varphi_i^{\kappa} e_{\kappa}$, получим, что

$$\varphi_i^{\kappa} C_{ij}^s = C_{pq}^{\kappa} \varphi_i^p \varphi_j^q$$

Обратно, если две алгебры Ли заданы своими структурными уравнени-

ями, то вопрос об их изоморфности сводится к разрешимости этой системы алгебраических уравнений относительно $\mathcal{U}$.

Пусть h и κ — векторные подпространства в $\mathfrak{g}$. Через $[h, \kappa]$ обозначается линейная оболочка всех коммутаторов $[X, Y]$, где X пробегает h , Y пробегает κ . Подпространство $h \subset \mathfrak{g}$ называется подалгеброй Ли, если $[h, h] \subset h$. Оно, следовательно, само является алгеброй Ли. Подалгебра Ли, удовлетворяющая более сильному условию $[\mathfrak{g}, h] \subset h$, называется идеалом. Максимальный (по включению) идеал $\mathfrak{Z}$, удовлетворяющий условию $[\mathfrak{Z}, \mathfrak{g}] = 0$, называется центром алгебры Ли. Так как $[\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}] = 0$, то центр всегда коммутативен.

Всякую комплексную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ размерности $2n$ можно рассматривать как вещественную алгебру Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ размерности $2n$ с комплексной структурой $J: J^2 = -I$, удовлетворяющей условию $[JX, JY] = -[X, Y]$. Алгебра $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ разлагается в прямую сумму $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \oplus J\mathfrak{g}_0$. Тогда $\mathfrak{g}_0$ есть подалгебра в $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, называемая вещественной формой алгебры $\mathfrak{g}$.

Пример I. Множество всех n -мерных матриц над полем $\mathbb{K}$ превращается в алгебру Ли, если мы введем коммутатор следующим образом:

$$[u, v] = uv - vu,$$

Эта алгебра называется полной линейной (или матричной) алгеброй Ли и обозначается через $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Действительно, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ есть n^2 -мерное векторное пространство с операциями $u+v$ и λu . Свойства коммутатора здесь выполняются очевидным образом.

Введем в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ базис, состоящий из матричных единиц E_{α}^{β} , у которых на пересечении α -й строки и β -го столбца стоит единица, а все остальные элементы равны нулю. Тогда для произвольной матрицы $u = (u_{\beta}^{\alpha})$ получаем разложение $u = u_{\beta}^{\alpha} E_{\alpha}^{\beta}$. Так как $E_{\alpha}^{\beta} E_{\gamma}^{\delta} = \delta_{\gamma}^{\beta} E_{\alpha}^{\delta}$, то в этом базисе структурные уравнения имеют вид

$$[E_{\alpha}^{\beta}, E_{\gamma}^{\delta}] = \delta_{\gamma}^{\beta} E_{\alpha}^{\delta} - \delta_{\alpha}^{\delta} E_{\gamma}^{\beta},$$

а коммутатор любой пары матриц записывается в координатах в виде

$$[u, v] = (u_{\gamma}^{\alpha} v_{\beta}^{\delta} - v_{\gamma}^{\alpha} u_{\beta}^{\delta}) E_{\alpha}^{\beta}.$$

Отметим, что вещественной формой комплексной алгебры $gl(n, \mathbb{C})$ является алгебра $gl(n, \mathbb{R})$.

Пример 2. Трехмерное евклидово векторное пространство E^3 станет алгеброй Ли, если в качестве коммутатора $[u, v]$ пары векторов взять их векторное произведение. В самом деле, как доказывается в курсе аналитической геометрии, эта операция билинейна, кососимметрична, а так как $[[u, v], w] = v(u, w) - u(v, w)$, то будет выполнено и тождество Якоби.

Выберем в E^3 ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$. Тогда в силу свойств векторного произведения получаем следующие структурные уравнения:

$$[e_1, e_2] = e_3 \quad ; \quad [e_2, e_3] = e_1 \quad ; \quad [e_3, e_1] = e_2 \quad ,$$

и структурные константы $C_{12}^3 = C_{23}^1 = C_{31}^2 = 1$ (остальные отличаются от них либо знаком, либо равны нулю и обычно не указываются). Отсюда следует, что коммутатор $W = [u, v]$ имеет координаты

$$W = u^1 v^2 - u^2 v^1, \quad W = u^2 v^3 - u^3 v^2, \quad W = u^3 v^1 - u^1 v^3.$$

Пример 3. Пусть V^n — векторное пространство над полем K . Множество всех линейных операторов этого пространства $gl(V)$ можно отождествить с алгеброй Ли $gl(n, K)$. Это делается выбором некоторого базиса. Пусть теперь в V^n задана билинейная форма $\Phi(X, Y)$. Легко видеть, что подмножество линейных операторов $g(\Phi) \subset gl(V)$, удовлетворяющих условию инвариантности

$$\Phi(uX, Y) + \Phi(X, uY) = 0,$$

образуют подалгебру Ли. В самом деле, если $u, v \in g(\Phi)$, то

$$\Phi([u, v]X, Y) = \Phi(uvX, Y) - \Phi(vuX, Y) =$$

$$= -\Phi(vX, uY) + \Phi(uX, vY) = -\Phi(X, [u, v]Y)$$

и, значит, $[u, v] \in g$. Условие инвариантности можно записать и в матричном виде. Полагая $\Phi(X, Y) = X^T \Phi Y$, будем иметь $u^T \Phi + \Phi u = 0$.

Рассмотрим, например, случай, когда V^n вещественно, а форма $\Phi(X, Y)$ невырождена и симметрична. Тогда $g(\Phi)$ называется вещественной псевдоортогональной алгеброй Ли соответствующе-

го индекса и обозначается $o(p, q)$. Строение матриц из этой алгебры имеет наиболее простой вид, если выбрать матрицу билинейной формы в каноническом виде

$$\varphi = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}.$$

Разбивая матрицу u на соответствующие блоки $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$, получим следующие условия:

$$u_1^T + u_1 = 0, \quad u_2^T - u_3 = 0, \quad u_4^T + u_4 = 0.$$

Таким образом,

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2^T & u_4 \end{bmatrix},$$

где матрицы u_1 и u_4 кососимметричны. Отсюда следует, что эта подалгебра имеет размерность $\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} + pq$.

Если форма положительно определенная ($p=n$; $q=0$), то получаем вещественную ортогональную алгебру Ли $o(n, \mathbb{R})$. В ортонормированном базисе $\varphi = I$. Тогда условие инвариантности принимает вид $u^T + u = 0$. Алгебра $o(n, \mathbb{R})$ состоит, следовательно, из кососимметрических матриц.

Пример 4. Рассмотрим, в частности, алгебру $o(3, \mathbb{R})$ кососимметричных 3-матриц. В качестве базиса выбираем матрицы

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Структурные уравнения имеют вид

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2.$$

Таким образом, мы видим, что эта алгебра изоморфна трехмерной алгебре Ли с векторным произведением E^3 , рассмотренной в примере 2. Изоморфизм устанавливается соответствием

$$(u^1, u^2, u^3) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & u^1 & u^3 \\ -u^1 & 0 & u^2 \\ -u^3 & -u^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 5. Пусть M — дифференцируемое многообразие размерности n . Обозначим через $\mathcal{X}(M)$ множество всех дифференцируемых векторных полей на этом многообразии. Относительно операции сложения $X + Y$ и умножения на число λX $\mathcal{X}(M)$ есть векторное пространство. Определим коммутатор векторных полей формулой $[X, Y]\varphi = X \circ Y \varphi - Y \circ X \varphi$ для всякой дифференцируемой функции $\varphi \in \mathcal{F}(M)$. Нетрудно проверить, что в силу ассоциативности композиции $(X \circ Y) \circ Z = X \circ (Y \circ Z)$ коммутатор обладает всеми свойствами, сформулированными в определении алгебр Ли. Однако эта алгебра не является конечномерной.

Чтобы получить выражение для коммутатора в координатах, зададим на M произвольное поле реперов $\{e_\alpha(x)\}$. Пусть $[e_\alpha, e_\beta] = R_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$, где $R_{\alpha\beta}^\gamma(x)$ — объект неголономности этого поля. Тогда, полагая $X = X^\alpha(x) e_\alpha$, $Y = Y^\beta(x) e_\beta$, получим

$$[X, Y]^\gamma = X^\alpha e_\alpha(Y^\gamma) - Y^\beta e_\beta(X^\gamma) + R_{\alpha\beta}^\gamma X^\alpha Y^\beta.$$

В частности, в натуральном поле реперов $e_\alpha = \partial_\alpha$ имеем $R_{\alpha\beta}^\gamma = 0$ и, следовательно,

$$[X, Y]^\gamma = X^\alpha \partial_\alpha Y^\gamma - Y^\beta \partial_\beta X^\gamma.$$

Приведем в заключение классификацию всех вещественных алгебр Ли размерности $n \leq 3$. Их структурные уравнения могут быть приведены к следующему виду:

$$n = 1. \quad [e_1, e_1] \equiv 0;$$

$$n = 2. \quad \text{I. } [e_1, e_2] = 0; \quad \text{II. } [e_1, e_2] = e_1;$$

$$n = 3. \quad \text{I. } [e_i, e_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$$\text{II. } [e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = e_1;$$

$$\text{III. } [e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = 0;$$

$$\text{IV. } [e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = e_1 + e_2;$$

$$\text{V. } [e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = e_2;$$

$$\text{VI. } [e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = \lambda e_2, (\lambda \neq 0, \lambda \neq 1);$$

$$\begin{aligned} \text{VII. } [e_1, e_2] &= 0, [e_1, e_3] = e_2, [e_2, e_3] = -e_1 + \mu e_2 (\mu^2 < 4); \\ \text{VIII. } [e_1, e_2] &= e_1; [e_1, e_3] = 2e_2, [e_2, e_3] = e_3; \\ \text{IX. } [e_1, e_2] &= e_3, [e_1, e_3] = -e_2, [e_2, e_3] = e_1. \end{aligned}$$

Над полем комплексных чисел типы VI и VII, а также VIII и IX совпадают.

3.1. Доказать, что подмножество $sl(n, \mathbb{K}) \subset gl(n, \mathbb{K})$ матриц с нулевым следом ($\text{tr } U = 0$) есть подалгебра Ли. Выяснить строение матриц следующих алгебр Ли:

$$1) SO(n, \mathbb{C}) = o(n, \mathbb{C}) \cap sl(n, \mathbb{C}); \quad 2) SO(p, q) = o(p, q) \cap sl(n, \mathbb{R}).$$

3.2. Выяснить строение матриц следующих алгебр Ли $g(\Phi)$, где

1) $\Phi(X, Y)$ – эрмитова симметричная невырожденная форма сигнатуры (p, q) (псевдоунитарная алгебра Ли $U(p, q)$);

2) $\Phi(X, Y)$ – эрмитова симметричная определенная форма (унитарная симметричная алгебра Ли $U(n)$);

3) $SU(p, q) = U(p, q) \cap sl(n, \mathbb{C})$ (специальная псевдоунитарная алгебра Ли).

3.3. Выяснить строение матриц следующих алгебр Ли: 1) $sp(m, \mathbb{K})$, $2m = n$ – соответствует косоэрмитовой невырожденной форме $\Phi(X, Y)$ (симплектическая алгебра Ли); 2) $sp(m) = sp(m, \mathbb{C}) \cap SU(2m)$.

3.4. Для того, чтобы алгебры Ли были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие базисы, относительно которых структурные константы совпадают. Доказать.

3.5. Доказать, что всякая двумерная алгебра Ли g изоморфна либо алгебре $[e_1, e_2] = 0$, либо алгебре $[e_1, e_2] = e_1$.

3.6. Доказать изоморфизм следующих алгебр Ли:

$$1) SO(5, \mathbb{R}) \cong sp(2); \quad 2) SO(3, 2, \mathbb{R}) \cong sp(2, \mathbb{R}).$$

3.7. Доказать, что имеют место следующие цепочки изоморфизмов алгебр Ли: 1) $SU(2) \cong SO(3, \mathbb{R}) \cong sp(1)$; 2) $sl(2, \mathbb{R}) \cong SU(1, 1) \cong SO(2, 1, \mathbb{R}) \cong sp(1, \mathbb{R})$.

3.8. Доказать, что отображение

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & b-c & -i(b+c) \\ c-b & 0 & 2ia \\ i(b+c) & -2ia & 0 \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

определяет изоморфизм алгебры Ли $\mathcal{SL}(2, \mathbb{C})$ на алгебру $SO(3, \mathbb{C})$.

3.9. Образуют ли алгебру Ли с коммутатором $[u, v] = uv - vu$;
1) множество всех симметричных n -матриц? 2) множество всех кососимметричных n -матриц?

3.10. Найти структурные уравнения алгебры $SO(n, \mathbb{R})$ кососимметричных матриц, используя базис $e_{\beta}^{\alpha} = E_{\beta}^{\alpha} - E_{\alpha}^{\beta}$, $(\alpha < \beta)$.

3.11. Найти алгебру аффинной группы $GA(n)$ (задача 2.31).

3.12. Показать, что $(n+1)$ -матрицы $\begin{bmatrix} u & -\lambda x \\ x^T & 0 \end{bmatrix}$, где u - кососимметричная n -матрица, $x \in \mathbb{R}^n$, λ - ненулевая константа, образуют алгебру Ли.

3.13. Показать, что для двумерной алгебры Ли тождество Якоби удовлетворяется тождественно.

3.14. Проверить, что

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

является базисом алгебры $\mathcal{SL}(2, \mathbb{K})$. Найти ее структурные уравнения и структурные константы.

3.15. Показать, что матрицы

$$e_1 = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

образуют базис в алгебре Ли $SU(2)$. Найти структурные уравнения.

3.16. Найти структурные уравнения алгебры Ли $SU(2)$, выбрав базис

$$e_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Доказать, что она изоморфна алгебре Ли чисто мнимых кватернионов:

$$q = x^1 i + x^2 j + x^3 k$$

$$3.17. \text{ Показать, что } e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

является базисом алгебры $SU(1, 1)$. Найти структурные уравнения и структурные константы этой алгебры Ли.

3.18. Пусть V - семимерное векторное пространство с бази-

сом $\{e_\alpha\}$. При каких условиях операция $[e_\alpha, e_\beta] = \alpha_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$, где $\alpha + \beta \leq 7$, $\alpha_{\alpha\beta}$ - кососимметричный тензор (остальные коммутаторы равны нулю) превращает V в алгебру Ли?

3.19. Пусть $\mathcal{A}$ - произвольная ассоциативная алгебра с законом умножения uv . Положим $[u, v] = uv - vu$. Доказать, что $\mathcal{A}$ с такой операцией является алгеброй Ли. (Она называется коммутаторной алгеброй Ли алгебры $\mathcal{A}$ и обозначается $[\mathcal{A}]$).

3.20. Пусть h, k - векторные подпространства в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Доказать следующие соотношения:

$$[h, k] = [k, h]; \quad [\mathfrak{g}, [h, k]] \subset [h, [k, \mathfrak{g}]] + [k, [\mathfrak{g}, h]].$$

3.21. Доказать, что следующие подмножества матриц в $gl(n, K)$ являются ее подалгебрами Ли: 1) подмножество $t(n, K)$ верхних треугольных матриц: $u_{\beta}^{\alpha} = 0, \alpha > \beta$; 2) подмножество $t_0(n, K)$ строго верхних треугольных матриц: $u_{\beta}^{\alpha} = 0, \alpha \geq \beta$.

3.22. Показать, что в трехмерной алгебре Ли с коммутатором - векторным произведением нет 2-мерных подалгебр.

3.23. Показать, что матрицы ($i = 1, \dots, m$)

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_m \end{bmatrix}, \quad u_i = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_i \\ \lambda_i & 0 \end{bmatrix}$$

образуют подалгебру Ли в $O(2m)$.

3.24. Производной алгеброй $\mathfrak{g}^{(2)}$ алгебры $\mathfrak{g}$ (или ее коммутантом) называется линейное подпространство в $\mathfrak{g}$, натянутое на коммутаторы: $\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Доказать, что $\mathfrak{g}^{(2)}$ есть идеал в $\mathfrak{g}$.

3.25. Пусть h, k - идеалы в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Доказать, что $[h, k]$ есть также идеал в $\mathfrak{g}$.

3.26. Доказать, что в алгебре Ли со структурой $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_2$ подпространство $\{e_1, e_3\}$ есть подалгебра. Будет ли оно идеалом?

3.27. Найти идеалы и центр алгебры Ли $t_0(3, R)$ матриц вида

$$\begin{bmatrix} 0 & u^1 & u^3 \\ 0 & 0 & u^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.28. Показать, что 3-матрицы $u = \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & -a & q \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

образуют алгебру Ли. Уравнения $p = q = 0$ выделяют подалгебру, а уравнения $a = c = 0$ идеал.

3.29. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра. Ее дифференцированием называется линейный оператор $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, обладающий свойством $D(uv) = D(u)v + uD(v)$. Доказать, что множество всех дифференцирований есть алгебра Ли с коммутатором $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$.

3.30. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем K и D — ее дифференцирование. Показать, что $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus K$ с коммутатором

$$[(u, \lambda), (v, \mu)] = ([u, v] + \lambda Dv - \mu Du, 0)$$

есть алгебра Ли, в которой $\mathfrak{g}$ является идеалом.

3.31. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная алгебра Ли со структурными константами c_{ij}^k и $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ — ее вещественная реализация. Доказать, что в базисе $\{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$ структурные константы алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ равны $\pm \operatorname{Re} c_{jk}^i, \pm \operatorname{Im} c_{jk}^i$.

3.32. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная алгебра Ли и $\mathfrak{g}_0$ — ее вещественная форма. Для $X \in \mathfrak{g}$ положим $X = u + iv$, $u, v \in \mathfrak{g}_0$ и определим сопряжение в $\mathfrak{g}$ по формуле $\sigma : u + iv \rightarrow u - iv$. Доказать, что оно обладает свойствами:

$$\sigma^2 = I, \quad \sigma(X + Y) = \sigma(X) + \sigma(Y),$$

$$\sigma(\lambda X) = \bar{\lambda} \sigma(X), \quad \sigma[X, Y] = [\sigma X, \sigma Y]$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

§ 4. Алгебра Ли группы Ли

Пусть G — группа Ли. Оказывается, что всякой группе Ли можно поставить в соответствие некоторую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ следующим образом.

Векторное поле $v(x)$ на группе Ли называется левоинвари-

антным, если оно инвариантно при левых сдвигах, т.е. $L_{*a} v(x) = v(ax)$. Пусть $v = v(e)$ — его значение в единице группы. Из определения следует, что всякое левоинвариантное поле можно получить из его начального значения левыми сдвигами: $v(a) = L_{*a} v$. Пусть $f^i(a, b)$ — групповые функции, определенные в окрестности единицы. Тогда $(L_{*a})^i = (L_j^i(a))$, где

$$L_j^i(a) = \frac{\partial f^i(a, b)}{\partial b^j} \Big|_{b=e} \quad (I)$$

Поэтому относительно натурального поля реперов $v(a) = L_j^i(a) v^j \partial_i$.

Пусть $\mathcal{g}$ — множество всех левоинвариантных векторных полей на G . Это векторное подпространство $\mathcal{g} \subset \mathcal{X}(G)$. Так как $L_{*a}[u(x), v(x)] = [L_{*a} u(x), L_{*a} v(x)]$, то $\mathcal{g}$ является алгеброй Ли с коммутатором $[u(a), v(a)]$. Она называется алгеброй Ли группы Ли G . Эта алгебра имеет ту же размерность, что и группа Ли. Поля $e_i(a) = L_i^\kappa(a) \partial_\kappa$ линейно независимы в каждой точке и образуют ее базис. Произвольное левоинвариантное векторное поле выражается через них линейной комбинацией с постоянными коэффициентами: $v(a) = v^i e_i(a)$. Записывая структурные уравнения алгебры $[e_i(a), e_j(a)] = C_{ij}^\kappa e_\kappa(a)$, мы видим, что объект неголономности левоинвариантного поля реперов совпадает со структурным тензором. Записывая эти уравнения относительно натурального поля реперов, получим уравнения

$$L_i^s \partial_s L_j^\kappa - L_j^s \partial_s L_i^\kappa = C_{ij}^s L_s^\kappa \quad (2)$$

Полагая здесь $a=e$ и учитывая, что $L_j^i(e) = \delta_j^i$, получим формулу, позволяющую вычислить структурные константы алгебры $\mathcal{g}$ непосредственно через групповые функции

$$C_{ij}^\kappa = (\partial_i L_j^\kappa - \partial_j L_i^\kappa) |_{a=e} \quad (3)$$

Иногда алгебру Ли $\mathcal{g}$ удобно рассматривать как касательное пространство $T_e(G)$ в единице группы, полагая $[u, v] = [u(a), v(a)]_{a=e}$.

Совершенно аналогично алгебру Ли группы Ли можно было бы определить и при помощи правоинвариантных векторных полей: $R_{*a} v(x) = v(xa)$. Тогда мы получим алгебру Ли $\mathfrak{g}'$, изоморфную $\mathfrak{g}$.

Оказывается, что при соответствии $G \rightarrow \mathfrak{g}$ подгруппе Ли отвечает подалгебра Ли, нормальному делителю — идеал, центру группы Ли — центр алгебры Ли. Обратное соответствие однозначно лишь для связных групп Ли.

Как и для всякого векторного пространства, возможна двойственная точка зрения на алгебру $\mathfrak{g}$. Говорят, что внешняя дифференциальная $\mathfrak{g}$ -форма θ на G левоинвариантна, если

$$(L_a^* \theta)(v_1 \dots v_q) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(L_{*a} v_1, \dots, L_{*a} v_q) = \theta(v_1, \dots, v_q)$$

для всех $a \in G$. Рассмотрим множество $\mathfrak{g}^*$ всех левоинвариантных 1-форм. Оказывается, что $\mathfrak{g}^*$ есть векторное пространство, размерность которого совпадает с размерностью группы. Пусть $\theta^1, \dots, \theta^n$ — базис этого пространства, взаимный с базисом алгебры $\mathfrak{g}$: $\theta^i(e_j(x)) = \delta_j^i$. Тогда

$$d\theta^\kappa = -\frac{1}{2} C_{ij}^\kappa \theta^i \wedge \theta^j \quad (4)$$

Эти уравнения, называемые структурными уравнениями Маурера-Картана, двойственны структурным уравнениям, указанным выше.

Относительно натурального поля координат $\{d\alpha^i\}$ базисные левоинвариантные 1-формы имеют вид $\theta^i = V_\kappa^i(\alpha) d\alpha^\kappa$, где матрица (V_κ^i) обратна (L_κ^i) . Ее компоненты, называемые вспомогательными функциями, можно подсчитать и непосредственно через групповые функции:

$$V_j^i(\alpha) = \left. \frac{\partial f^i(b, \alpha)}{\partial \alpha^j} \right|_{b=\alpha^{-1}} \quad (5)$$

Тогда структурные уравнения Маурера-Картана принимают вид

$$\partial_j V_i^\kappa - \partial_i V_j^\kappa = C_{pq}^\kappa V_i^p V_j^q \quad (6)$$

Полагая $\alpha = e$ и учитывая, что $\cdot_j^i(e) = \delta_j^i$, получим еще один способ вычисления структурных констант алгебры $\mathfrak{g}$

$$c_{ij}^{\kappa} = (\partial_j V_i^{\kappa} - \partial_i V_j^{\kappa})|_{\alpha=e} \quad (7)$$

Пример 1. Умножение в двумерной аффинной группе $GA(2)$ задается групповыми функциями

$$f^1(\alpha, \beta) = \alpha^1 + \alpha^2 \beta^1, \quad f^2(\alpha, \beta) = \alpha^2 \beta^2.$$

Найдем базис левоинвариантных векторных полей и взаимный с ним базис левоинвариантных 1-форм, а также структурные уравнения. Имеем

$$\left(\frac{\partial f^i(\alpha, \beta)}{\partial \beta^j} \right) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, согласно (I)

$$(L_j^i) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad (V_j^i) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому $e_1(\alpha) = \alpha^2 \partial_1$, $e_2(\alpha) = \alpha^2 \partial_2$ со структурными уравнениями $[e_1, e_2] = -e_1$. Базис левоинвариантных форм $\theta^1 = \frac{1}{\alpha^2} d\alpha^1$, $\theta^2 = \frac{1}{\alpha^2} d\alpha^2$. Они удовлетворяют уравнениям Маурера-Картана

$$d\theta^1 = \theta^1 \wedge \theta^2, \quad d\theta^2 = 0.$$

Пример 2. Рассмотрим полную линейную группу $GL(n, K)$. Левый сдвиг имеет вид $L_A X = AX$. Здесь справа - обычное матричное умножение. Дифференцируя, получим $L_A U = AU$, где $U \in M(n, K)$. Поэтому всякое левоинвариантное векторное поле на $GL(n, K)$ имеет вид $U(A) = AU$. Полагая $U = E_{\alpha}^{\beta}$, получим базис таких полей $E_{\alpha}^{\beta}(A) = AE_{\alpha}^{\beta}$, состоящих из n -матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & A_{\beta}^1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & A_{\beta}^n & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где ненулевые элементы образуют β -й столбец. Поэтому относительно натурального поля реперов $E_{\alpha}^{\beta}(A) = A_{\alpha}^{\beta} \partial / \partial A_{\beta}^{\alpha}$. Пусть $u(A) = Au$, $v(A) = Av$ — пара левоинвариантных полей. Вычислим их коммутатор. Учитывая, что $\partial A_{\beta}^{\alpha} / \partial A_{\tau}^{\sigma} = \delta_{\sigma}^{\alpha} \delta_{\beta}^{\tau}$, будем иметь

$$[u(A), v(A)] = A(uv - vu).$$

Полученную алгебру Ли обозначают через $gl(n, K)$. Ее удобно, положив $A = I$, отождествить с касательным пространством в единице группы $GL(n, K)$. Последнее есть, очевидно, пространство $M(n, K)$ всех n -матриц с коммутатором $[uv] = uv - vu$. Мы узнаем полную линейную алгебру Ли, рассмотренную в § 3, пример I. Там же получены и структурные уравнения этой алгебры.

Найдем левоинвариантные формы. Базис этих форм вычисляем по формуле $\theta_{\beta}^{\alpha} = V_{\beta\sigma}^{\alpha\tau} dA_{\tau}^{\sigma}$, где в силу (5)

$$V_{\beta\sigma}^{\alpha\tau} = \partial(B_{\gamma}^{\alpha} A_{\beta}^{\gamma}) / \partial A_{\tau}^{\sigma} \Big|_{B=A^{-1}} = \tilde{A}_{\sigma}^{\alpha} \delta_{\beta}^{\tau}$$

(волной отмечены компоненты обратной матрицы). Таким образом, $\theta_{\beta}^{\alpha} = \tilde{A}_{\sigma}^{\alpha} dA_{\beta}^{\sigma}$. Найдем уравнения Маурера-Картана. Вычисляя внешний дифференциал, получим $d\theta_{\beta}^{\alpha} = d\tilde{A}_{\sigma}^{\alpha} \wedge dA_{\beta}^{\sigma}$. Но $dA_{\beta}^{\sigma} = A_{\alpha}^{\sigma} \theta_{\beta}^{\alpha}$, $d\tilde{A}_{\sigma}^{\alpha} = -\tilde{A}_{\sigma}^{\gamma} \theta_{\gamma}^{\alpha}$. Поэтому $d\theta_{\beta}^{\alpha} = \theta_{\beta}^{\sigma} \wedge \theta_{\sigma}^{\alpha}$.

Пример 3. Пусть $G(\varphi) \subset GL(n, K)$ — топологическая подгруппа, оставляющая инвариантной билинейную форму $\varphi(x, y)$. Так как условия инвариантности $\varphi(Ax, Ay) = \varphi(x, y)$, записанные в любом базисе, полиномиальны, то $G(\varphi)$ — замкнутая подгруппа Ли. Найдем соответствующую ей подалгебру Ли в $gl(n, K)$. Будем рассматривать ее как векторное подпространство в касательном пространстве единицы. Пусть $A(t)$ — произвольная кривая класса C^1 , выходящая из единицы. Параметр всегда можно выбрать так, чтобы $A(0) = I$. Эта кривая принадлежит подгруппе $G(\varphi)$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi(A(t)x, A(t)y) = \varphi(x, y)$$

тождественно по t . Дифференцируя это тождество, получим

$$\varphi\left(\frac{dA}{dt}x, A(t)y\right) + \varphi\left(A(t)x, \frac{dA}{dt}y\right) = 0.$$

Полагая здесь $t = 0$, приходим к следующему условию, которому должны удовлетворять касательные векторы $u = \frac{dA}{dt} \Big|_0$ в единице.

$$\Phi(ux, y) + \Phi(x, uy) = 0.$$

Мы узнаем в нем условие инвариантности, выделяющее подалгебру Ли $g(\Phi)$, рассмотренную в § 3, пример 3. Можно показать, что такими касательными векторами порождается вся подалгебра $g(\Phi)$.

Рассмотрим для примера, ортогональную подгруппу. Дифференцируя тождество $A^T(t)A(t) = 0$ по t и полагая $t = 0$, получим $u^T + u = 0$. Это условие характеризует подалгебру $O(n, \mathbb{K}) \subset gl(n, \mathbb{K})$ кососимметричных матриц.

4.1. Доказать, что всякая группа Ли есть ориентируемое многообразие.

4.2. Выяснить, можно ли ввести на сфере S^2 структуру группы Ли?

4.3. Разлагая групповые функции $f^i(a, b)$ в ряд окрестности единицы с точностью до малых 2-го порядка, получим $f^i = a^i + b^i + A_{jk}^i a^j b^k$, $A_{jk}^i = \text{const}$. Показать, что $C_{jk}^i = A_{jk}^i - A_{kj}^i$.

4.4. Пусть $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — две кривые, выходящие из единицы группы Ли и $u = \frac{d\alpha}{dt}(0)$, $v = \frac{d\beta}{dt}(0)$. Показать, что коммутатор $[u, v]$ есть касательный вектор коммутаторной кривой в единице, т.е.

$$[u, v] = \frac{d}{dt} \left\{ \alpha(\sqrt{t}) \beta(\sqrt{t}) \alpha^{-1}(\sqrt{t}) \beta^{-1}(\sqrt{t}) \right\} \Big|_{t=0}.$$

4.5. Пусть G — группа Ли и $q = \alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1}$ — коммутатор. Показать, что с точностью до малых 2-го порядка его координаты равны:

$$q^i = C_{jk}^i a^j b^k.$$

4.6. Проверить, что отображение $\mathcal{U} : U(1) \rightarrow SO(2)$ по формуле $\mathcal{U}(\alpha + \beta i) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in SO(2)$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ является

изоморфизмом. Найти изоморфизм $\mathcal{U}_*$ их алгебр Ли.

4.7. В векторном пространстве V^n задана квадратичная форма $\Phi(x, y)$. Найти подалгебру Ли $g(\Phi) \subset gl(n, \mathbb{K})$, соответствующую подгруппе инвариантности $G(\Phi)$ этой формы.

4.8. Найти алгебру Ли аддитивной группы $\mathbb{R}^1$.

4.9. Найти алгебру Ли $ga(n)$ аффинной группы $GA(n)$, представленной матрицами $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

4.10. Найти алгебру группы $SL(n, \mathbb{K})$.

4.11. Найти алгебру Ли: 1) унитарной группы $U(n): A^* A = I$; 2) специальной унитарной группы $SU(n)$.

4.12. Найти алгебру Ли псевдоунитарной группы $U(1, n)$.

4.13. Найти алгебру Ли псевдоортогональной группы $O(p, q)$.

4.14. Найти алгебру Ли группы S^3 кватернионов единичного модуля (§ 2, пример 4).

4.15. Найти алгебру Ли симплектической группы $Sp(m, \mathbb{K}) = \{ A \in GL(n, \mathbb{K}) : A^* \Phi A = \Phi \}$, $m = \frac{n}{2}$, $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix}$.

4.16. Найти алгебру Ли ортогональной симплектической группы $Sp(m, \mathbb{R}) \cap O(2m)$. Определить ее размерность.

4.17. Найти алгебру Ли группы инвариантности симметричной квадратичной формы ранга $z \leq n$ сигнатуры (p, q) в $\mathbb{R}^n$.

4.18. Найти алгебру Ли группы инвариантности $G(\Phi)$ кососимметричной 2-формы произвольного ранга $z = 2p \leq n$ в $\mathbb{R}^n$.

4.19. Вычислить структурные константы группы Ли, заданной групповыми функциями $f^1(a, b) = a + b e^{-a^2}$, $f^2(a, b) = a^2 + b^2$.

4.20. Найти групповые функции, алгебру Ли и структурные константы группы Ли $T_o(3, \mathbb{R})$ унипотентных 3-матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a^1 & a^3 \\ 0 & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.21. Найти алгебру Ли следующих двумерных групп Ли, указав их структурные уравнения: 1) аддитивной группы $\mathbb{R}^2$; 2) аффинной группы $GA(2)$.

4.22. Найти алгебру Ли трехмерной группы $\mathbb{R}^1 \times GA(2)$.

4.23. Найти структурные уравнения аффинной группы $GA(n)$.

4.24. Найти группы Ли обратимых элементов следующих ассоциативных алгебр: 1) алгебры $\mathbb{C}$ комплексных чисел; 2) алгебры E двойных чисел; 3) алгебры $\mathbb{H}$ кватернионов. Записать их структурные уравнения в стандартном базисе.

4.25. Найти алгебру Ли псевдоортогональной группы $O(2, 1)$ и ее структурные уравнения.

4.26. Для группы Ли из зад. 2.40 найти левоинвариантные век-

торные поля. Приняв за базис поля, совпадающие в единице с векторами канонического базиса в $\mathbb{R}^3$, найти структурные уравнения этой группы Ли.

4.27. Доказать, что лево- и правоинвариантные векторные поля на группе Ли аналитичны.

4.28. Показать, что всякое лево- (право) инвариантное векторное поле на группе Ли полно.

4.29. Пусть $S(\alpha) = \alpha^{-1}$. Доказать, что если $\nu(\alpha)$ левоинвариантное векторное поле, то поле $S\nu(\alpha)$ правоинвариантно, а его значение в единице равно $-\nu$.

4.30. Доказать, что правоинвариантные векторные поля на группе Ли образуют алгебру Ли $\mathfrak{g}'$, изоморфную алгебре левоинвариантных полей $\mathfrak{g}$.

4.31. Пусть $\mathbb{R}$ - аддитивная группа Ли. Пусть ν - векторное поле на $\mathbb{R}$, определяемое формулой $\nu(\alpha) = 1$ для $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Показать, что оно инвариантно.

4.32. Найти левоинвариантные векторные поля на аффинной группе $GA(n)$.

4.33. Для группы $T_0(3, \mathbb{R})$ унипотентных матриц $\begin{pmatrix} 1 & \alpha^1 & \alpha^3 \\ 0 & 1 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ найти взаимные базисы левоинвариантных векторных полей и I-форм.

4.34. Доказать, что правоинвариантные векторные поля на группе Ли относительно натурального поля реперов имеют координаты

$$\nu^i(\alpha) = R_j^i(\alpha) \nu^j, \quad \nu = \nu(e), \quad R_j^i(\alpha) = \left. \frac{\partial f^i(b, \alpha)}{\partial b^j} \right|_{b=e}.$$

4.35. Найти правоинвариантные векторные поля на группе $T_0(3, \mathbb{R})$ унипотентных матриц.

4.36. Пусть $\mathcal{A}$ - ассоциативная алгебра с единицей размерности n . Доказать, что множество $\mathcal{A}_0$ обратимых ее элементов есть n -мерная группа Ли. Найти левоинвариантные векторные поля и алгебру Ли этой группы.

4.37. Пусть G - комплексная группа Ли и J - ее комплексная структура. Доказать, что если $\nu(\alpha)$ - лево- (право) инвариантное векторное поле, то $J\nu$ - также лево- (право) инвариантно.

4.38. Пусть G - связная группа Ли и φ - диффеоморфизм G на себя, сохраняющий базис левоинвариантных I-форм: $\varphi^* \theta^i = \theta^i$. Доказать, что φ - левый сдвиг.

4.39. Показать, что всякая левоинвариантная 1-форма на $GL(n, \mathbb{K})$ имеет вид $\theta_A(X) = X A^{-1}$, где $X \in M(n, \mathbb{K})$, $A \in GL(n)$ и при правом сдвиге переходит в форму $\theta_{B A B^{-1}}(X)$.

4.40. Доказать, что на всякой группе Ли существует псевдориманова метрика, инвариантная относительно левых сдвигов.

4.41. Показав, что матрицы $\begin{bmatrix} e^z & 0 & -x \\ 0 & e^z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ образуют группу

Ли, доказать, что риманова метрика $ds^2 = e^{-2t} dx^2 + e^{2t} dy^2 + dz^2$ инвариантна относительно левых сдвигов.

4.42. Найти условия интегрируемости структурных уравнений Маурера-Картана.

4.43. Если внешние формы θ_1 и θ_2 на группе Ли левоинвариантны, то их косое произведение также левоинвариантно. Доказать.

4.44. Пусть θ — левоинвариантная q -форма на группе Ли. Доказать, что ее внешний дифференциал $d\theta$ есть также левоинвариантная $(p+1)$ -форма.

4.45. Пусть $\{e_i\}$ — базис алгебры $T_e(G)$ и $\{\theta^i\}$ — базис левоинвариантных форм. 1-форма $\theta = \theta^i e_i$ со значениями в $\mathfrak{g}$ называется кононической (или структурной) формой группы Ли G . Доказать, что если $\nu(\alpha)$ — левоинвариантное поле, то $\theta(\nu) = \nu$. Доказать также, что уравнения Маурера-Картана эквивалентны соотношению

$$d\theta(u, v) = -\theta([u, v])$$

4.46. Найти левоинвариантные 1-формы и структурные уравнения Маурера-Картана для аффинной группы $GA(n)$.

4.47. Найти структурные уравнения Маурера-Картана:
1) группы $SL(n, \mathbb{R})$; 2) ортогональной группы $O(n, \mathbb{R})$.

4.48. Найти алгебру Ли и структурные уравнения Маурера-Картана группы Ли из задачи 2.41.

§ 5. Экспоненциальное отображение. Локальные группы Ли.

Пусть $u(\alpha) = \underset{*}{L}_\alpha u$ — левоинвариантное векторное поле на группе Ли G . Его траектории есть решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{d\alpha}{dt} = u(\alpha)$ или в координатах

$$\frac{d\alpha^i}{dt} = L_j^i(\alpha) u^j$$

. При начальном значении $\alpha(0) = \alpha$ опре-

делена единственная траектория, которая записывается в виде экспоненциального ряда $\alpha(t) = \text{Exp}(tu) \alpha$, где

$$\text{Exp}(tu) = I + tu + \frac{t^2}{2} u^2 + \dots \quad (I)$$

Здесь $u^s(\alpha) = u(\alpha) \circ u^{s-1}(\alpha)$, а I понимается как тождественный дифференциальный оператор. В силу аналитичности и полноты всякого левоинвариантного векторного поля траектории аналитичны и определены при любом значении t .

Особое значение имеют траектории, проходящие через единицу группы Ли: $\alpha(0) = e$. Они обладают свойством $\alpha(t+s) = \alpha(t)\alpha(s)$ и являются поэтому однопараметрическими подгруппами в G . Они однозначно определяются левоинвариантным векторным полем — элементом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ или, что эквивалентно, своим начальным касательным вектором в единице.

Экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ определяется теперь следующим образом: $\exp u = \alpha(1)$. Оказывается, что оно является диффеоморфизмом в некоторой окрестности нуля. Соответствующая окрестность $V \subset G$ единицы группы Ли называется локальной группой Ли (или групповым ядром). В ней могут быть введены канонические координаты первого рода: за координаты элемента $\alpha = \exp u$ принимаются координаты вектора $u \in \mathfrak{g}$, относительно некоторого базиса.

Пусть $\{e_i\}$ — базис алгебры Ли. Тогда каждый вектор $u \in \mathfrak{g}$ однозначно представляется в виде $u = u_1 e_1 + \dots + u_z e_z$, где $u_1 = t^1$,

$u_z = t^z e_z$. Оказывается, что отображение $F(u) = \exp u_1 \dots$

$\exp u_z$ является диффеоморфизмом некоторой окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ на некоторую окрестность единицы в G . Это дает возможность рассматривать $(t^1, \dots, t^z)$ как координаты элемента $\alpha = F(u)$ в локальной группе. Они называются каноническими координатами второго рода.

Восстановление локальной группы Ли по алгебре Ли производится следующим образом. Пусть $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$ — структурные уравнения алгебры. Сначала интегрируются уравнения Маурера-Картана для вспомогательных функций $V_j^i(\alpha)$. Рассмотренные в ка-

нонических координатах первого рода $\alpha^i = u^i$, они вдоль однопараметрических подгрупп сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $W_j^i(t, \alpha)$

$$\frac{dW_j^i}{dt} = \delta_j^i + c_{pq}^i W_j^p \alpha^q \quad (2)$$

с начальным условием $W_j^i(0, \alpha) = 0$. Полагая затем $V_j^i(\alpha) = W_j^i(1, \alpha)$, получим вспомогательные функции. Для нахождения групповых функций $f^i(\alpha, \theta)$ рассматриваются уравнения Ли

$$V_\kappa^i(f) \frac{\partial f^\kappa}{\partial \theta^j} = V_j^i(\theta) \quad (3)$$

при начальном условии $f^i(\alpha, e) = \alpha^i$. Эти уравнения можно переписать в виде системы Пфаффа $V_\kappa^i(f) df^\kappa = V_\kappa^i(\theta) d\theta^\kappa$, что выражает собой факт левоинвариантности I-форм θ^i (§4).

Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ - подалгебра Ли, заданная базисом $\{v_1, \dots, v_\kappa\}$ левоинвариантных векторных полей. Так как $\mathfrak{h}$ подалгебра Ли, то $[v_\alpha, v_\beta] = \bar{c}_{\alpha\beta}^\gamma v_\gamma$. Это означает полную интегрируемость κ -мерного распределения, натянутого на $v_1, \dots, v_\kappa$. Тогда, максимальное связное интегральное многообразие этого распределения, проходящее через единицу группы, есть подгруппа Ли $H \subset G$, алгебра Ли которой есть $\mathfrak{h}$.

Используя канонические координаты второго рода на G , можно найти соответствующую $\mathfrak{h}$ локальную подгруппу Ли следующим образом:

$$\alpha(t^1, \dots, t^\kappa) = \exp(t^1 v_1) \dots \exp(t^\kappa v_\kappa).$$

Если же $\mathfrak{h}$ задана как аннулятор системы линейно независимых левоинвариантных I-форм $\{\omega^1, \dots, \omega^{n-\kappa}\}$, то дело сводится к интегрированию системы пфаффовых уравнений $\omega^\alpha = 0$. Ее полная интегрируемость обеспечена структурными уравнениями Маурера-Картана для $\mathfrak{h}$.

Пример I. Для группы $GL(n, \mathbb{K})$ левоинвариантные векторные поля, как мы видели в § 4, пример 2, имеют вид $\mathcal{U}(A) = A\mathcal{U}$, где $A \in GL(n, \mathbb{K})$, $\mathcal{U}$ - произвольная матрица. Соответствующая

ей однопараметрическая подгруппа $A(t)$ является решением матричного уравнения

$$\frac{dA}{dt} = Au, \quad A(0) = I.$$

Это решение хорошо известно и представляет собой экспоненциальный ряд

$$A(t) = \text{Exp}(tu) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} u^s.$$

Отображение $\exp: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$ есть поэтому обычная матричная экспонента $A = e^u$.

Пример 2. В алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ задана подалгебра $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$, определяемая уравнением $\omega = \theta_{\alpha}^{\alpha} = 0$. Из структурных уравнений Маурера-Картана следует, что $d\omega = \theta_{\alpha}^{\beta} \wedge \theta_{\beta}^{\alpha} = 0$. Поэтому это уравнение Пфаффа вполне интегрируемо. Найдем соответствующую подгруппу Ли. Имеем $\omega = \tilde{A}_{\beta}^{\alpha} dA_{\alpha}^{\beta} = 0$. Заметим, что если $\Delta = \det A$, то дифференциал $d\Delta = \Delta \cdot \tilde{A}_{\beta}^{\alpha} dA_{\alpha}^{\beta} = 0$. Поэтому интегральные многообразия имеют уравнения $\Delta = \text{const}$. Начальное условие $\Delta_e = 1$ выделяет подгруппу Ли $SL(n, \mathbb{K})$.

Пример 3. Пусть $T_o(3, \mathbb{R})$ — группа Ли унитарных матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a^1 & a^3 \\ 0 & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ее алгебра Ли $\mathfrak{t}_o(3, \mathbb{R})$ состоит из строго верхних треугольных матриц (зад. 4.20). Найдем однопараметрические подгруппы и экспоненциальное отображение.

Всякое левоинвариантное векторное поле, поскольку группа матричная, имеет вид $u(A) = Au$. Отсюда следует, что оно образовано матрицами

$$u(A) = \begin{bmatrix} 0 & u^1 & \alpha u^1 u^2 + u^3 \\ 0 & 0 & u^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Дифференциальные уравнения однопараметрических подгрупп, следовательно, таковы

$$\frac{da^1}{dt} = u^1, \quad \frac{da^2}{dt} = u^2, \quad \frac{da^3}{dt} = a^1 u^2 + u^3,$$

где u^i фиксированы. Интегрируя их при начальном условии $a^i(0)=0$, получим

$$a^1 = u^1 t, \quad a^2 = u^2 t, \quad a^3 = \frac{1}{2} u^1 u^2 (t)^2 + u^3 t.$$

Поэтому

$$\exp(u) = \begin{bmatrix} 1 & u^1 & \frac{1}{2} u^1 u^2 + u^3 \\ 0 & 1 & u^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь (u^1, u^2, u^3) являются каноническими координатами на группе $T_0(3, \mathbb{R})$.

Пример 4. Пусть алгебра Ли задана структурными уравнениями:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = 0, \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

Найдем соответствующую ей локальную группу Ли. Имеем структурные константы $C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1$, остальные равны нулю. Поэтому уравнения (2) принимают вид

$$\frac{dW_1^1}{dt} = 1 - W_1^3 u^2 + W_1^2 u^3, \quad \frac{dW_2^1}{dt} = -W_2^3 u^2 + W_2^2 u^3,$$

$$\frac{dW_3^1}{dt} = -W_3^3 u^2 + W_3^2 u^3, \quad \frac{dW_1^2}{dt} = 0, \quad \frac{dW_2^2}{dt} = 1,$$

$$\frac{dW_3^2}{dt} = 0, \quad \frac{dW_1^3}{dt} = 0, \quad \frac{dW_2^3}{dt} = 0, \quad \frac{dW_3^3}{dt} = 1$$

(здесь u^i фиксированы). При начальном условии $W_j^i(0, a) = 0$ получим следующее решение:

$$(W_j^i) = \begin{bmatrix} t, & \frac{1}{2} a^3(t)^2, & -\frac{1}{2} a^2(t)^2 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$(W_j^i) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \alpha^3 & -\frac{1}{2} \alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, левоинвариантные I-формы группы имеют вид

$$\theta^1 = d\alpha^1 + \frac{1}{2}(\alpha^3 d\alpha^2 - \alpha^2 d\alpha^3), \quad \theta^2 = d\alpha^2, \quad \theta^3 = d\alpha^3.$$

Интегрируя теперь уравнения Ли (3)

$$df^1 + \frac{1}{2}(f^3 df^2 - f^2 df^3) = d\theta^1 + \frac{1}{2}(\theta^3 d\theta^2 - \theta^2 d\theta^3),$$

$$df^2 = d\theta^2, \quad df^3 = d\theta^3,$$

получим

$$f^1 = \alpha^1 + \theta^1 + \frac{1}{2}(\alpha^2 \theta^3 - \alpha^3 \theta^2), \quad f^2 = \alpha^2 + \theta^2, \quad f^3 = \alpha^3 + \theta^3.$$

Сюда α^i входят как константы интегрирования. Мы нашли закон умножения в искомой группе, записанный в канонических координатах второго рода.

5.1. Доказать, что всякая локальная однопараметрическая подгруппа в группе Ли G однозначно продолжается до глобальной подгруппы Ли.

5.2. Доказать, что любая I-параметрическая подгруппа группы Ли топологически эквивалентна либо действительной прямой $\mathbb{R}$, либо окружности S^1 .

5.3. Найти левоинвариантные векторные поля на группе S^3 кватернионов единичного модуля и соответствующие однопараметрические подгруппы.

5.4. Найти однопараметрические подгруппы в $SL(2, \mathbb{R})$, соответствующие базисным элементам $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (зад. 3.14).

5.5. Найти однопараметрические подгруппы в $SU(2)$, соответствующие базисным элементам алгебры $\mathfrak{su}(2)$ из задачи 3.15.

5.6. Найти уравнение однопараметрических подгрупп на аффинной группе $GA(2)$.

5.7. Найти однопараметрическую подгруппу $\exp(tv)$ в $\mathcal{U}(2,1)$,

где

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.8. Найти однопараметрические подгруппы группы Ли, заданной групповыми функциями $f^1(\alpha, \beta) = \alpha^1 + \beta^1 e^{-\alpha^2}$, $f^2(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2$.

5.9. Доказать, что: 1) канонические координаты первого рода определены с точностью до линейного преобразования $\alpha^i = C_i^j \alpha^j$;

2) уравнения локальных однопараметрических групп имеют в них вид $\alpha^i = u^i t$.

5.10. Доказать, что в канонических координатах первого рода:

1) $L_j^i(\alpha) \alpha^j = \alpha^i$; 2) $f^i(\alpha, \beta) = \alpha^i + \beta^i + C_{jk}^i \alpha^j \beta^k + o(3)$.

5.11. Доказать, что в канонических координатах первого рода $(\alpha^{-1})^i = -\alpha^i$.

5.12. Показать, что всякая коммутативная группа Ли локально изоморфна векторной группе (§ I, пример I).

5.13. Доказать, что для любых $\alpha \in G$, $x \in G$, $v \in \mathfrak{g}$

$$\alpha \exp(tv) x = \exp(tv) \alpha x.$$

5.14. Доказать, что матричная экспонента

$$e^V = I + V + \frac{1}{2!} V^2 + \dots$$

сходится при любом $V \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

5.15. Доказать следующие свойства матричного экспоненциала:

$$e^{u^T} = (e^u)^T, \quad e^{\bar{u}} = (\overline{e^u}), \quad e^{-u} = (e^u)^{-1}.$$

5.16. Доказать, что для матричной экспоненты

$$\det(e^u) = e^{\text{tr} u}.$$

5.17. Пусть $V(\alpha) \in \mathfrak{g}$ - левоинвариантное векторное поле, $f \in \mathcal{F}^\infty(G)$, $\alpha \in G$. Доказать, что

$$(V^\kappa f)(\alpha \exp(tv)) = \frac{d^\kappa}{dt^\kappa} f(\alpha \exp(tv))$$

для любого $\kappa = 1, 2, \dots$

5.18. Доказать формулу Тейлора: пусть f - функция, аналитическая в точке $\alpha \in G$; тогда в некоторой окрестности нуля

$$\text{в } \mathfrak{g} \quad f(\alpha \exp(v)) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa!} (V^\kappa f)(\alpha).$$

5.19. Доказать, что

$$1) \exp(tu) \exp(tv) = \exp \left\{ t(u+v) + \frac{t^2}{2} [u, v] + o(t^3) \right\};$$

$$2) \exp(-tu) \cdot \exp(-tv) \cdot \exp(tu) \cdot \exp(tv) = \\ = \exp \left\{ t^2 [u, v] + o(t^3) \right\};$$

$$3) \exp(tu) \exp(tv) \cdot \exp(-tu) = \exp \left\{ tv + t^2 [u, v] + o(t^3) \right\}.$$

5.20. Доказать, что если $[u, v] = 0$, то $\exp(u+v) = \exp(u) \cdot \exp(v)$.

5.21. Вычислить: 1) $\exp(\lambda I_n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$;

$$2) \exp \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.22. Найти экспоненциал $\exp \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

5.23. Найти матрицу $u \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, удовлетворяющую условию

$$e^u = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.24. Вычислить $\exp(tV)$ для матрицы

$$V = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{o}(3, \mathbb{R}).$$

5.25. Показав, что $(n+1)$ -матрицы $u = \begin{bmatrix} u_n & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^n$, образуют подалгебру Ли в $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$, вычислить $\exp u$.

$$5.26. \text{ Пусть } u = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ 0 & & \ddots & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Вычислить $\exp(u)$.

5.27. Пусть $u \in M(n, \mathbb{C})$. Доказать следующие свойства матричного экспоненциала:

1) если u кососимметрична ($u^T = -u$), то $e^u \in SO(n, \mathbb{C})$;

2) если u косоэрмитова ($u^* = -u$), то $e^u \in SU(n)$;

3) если $\text{tr } u = 0$, то $e^u \in SL(n, \mathbb{C})$.

5.28. Найти экспоненциальное отображение

$$\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) .$$

5.29. Показать, что матрица $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}), \lambda \neq 1,$

при $\lambda > 0$ лежит на одной (с точностью до параметризации) однопараметрической подгруппе; при $\lambda < 0, \lambda \neq -1$ через нее нельзя провести ни одной однопараметрической подгруппы; при $\lambda = -1$ таких подгрупп бесконечное множество.

5.30. Показать, что элемент $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ принадле-

жит некоторой однопараметрической группе тогда и только тогда, когда или $a + d > -2$ или $a = d = -1, b = c = 0$.

5.31. Показать, что экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ сюръективно.

5.32. Доказать, что унитарная группа Ли $\mathcal{U}(n)$ полностью покрывается экспоненциальным отображением $\exp : \mathfrak{u}(n) \rightarrow \mathcal{U}(n)$.

5.33. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G обладает комплексной структурой J (§ 3). Доказать, что G является комплексной группой Ли.

5.34. Построить и исследовать экспоненциальное отображение алгебры Ли, заданной структурными уравнениями

$$[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = -e_2, [e_2, e_3] = -e_1 .$$

5.35. Алгебра Ли имеет структурные уравнения

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = 0 .$$

Найти двойственный базис левоинвариантных форм и структурные уравнения Маурера-Картана.

5.36. Найти групповые функции локальной группы Ли, заданной структурными уравнениями $d\theta^1 = 0, d\theta^2 = 0$.

5.37. Алгебра Ли имеет структурные уравнения

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = 0 .$$

Найти групповые функции $f^i(\alpha, \beta)$ соответствующей локальной группы Ли.

5.38. Найти локальную группу Ли по структурным уравнениям Маурера-Картана $d\theta^1 = 0, d\theta^2 = \theta^1 \wedge \theta^2$.

5.39. Найти группу Ли, заданную левоинвариантными 1-формами

$$\theta^1 = \alpha^3 d\alpha^1 - \alpha^2 d\alpha^3, \quad \theta^2 = \alpha^3 d\alpha^2, \quad \theta^3 = -\frac{d\alpha^3}{\alpha^3} .$$

5.40. Найти структурные уравнения и групповые функции группы Ли с левоинвариантными 1-формами $\theta^1 = -d \ln a^1$, $\theta^2 = a^1 da^2$,
 $\theta^3 = a^1 (da^3 + \ln a^1 da^2)$.

5.41. Найти подгруппы Ли $G \subset GL(n, \mathbb{R})$, определяемые следующими уравнениями: 1) $\theta_\beta^\alpha + \theta_\alpha^\beta = 0$; 2) $\theta_\beta^\alpha = 0$, $\alpha > \beta$;
 3) $\theta_\beta^\alpha = 0$, $\alpha \neq \beta$.

§ 6. Гомоморфизмы, автоморфизмы

Гомоморфизмом группы Ли G в группу Ли G' называется аналитическое отображение $\varphi: G \rightarrow G'$, сохраняющее произведение, т.е. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Если $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$, то говорят об антигомоморфизме. В обоих случаях $\varphi(e) = e'$ и $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$. Множество $\text{Ker } \varphi = \{a \in G : \varphi(a) = e'\}$ называется ядром гомоморфизма. Это замкнутый нормальный делитель в G . С другой стороны, $\varphi(G)$ есть подгруппа Ли в G' . В частности, чтобы гомоморфизм был инъективным, достаточно, чтобы $\text{Ker } \varphi = e$. Если, кроме того, $\varphi(G) = G'$, то группы изоморфны.

Пусть φ_* — дифференциал гомоморфизма. Тогда оказывается, что если $u(a)$ — левоинвариантное векторное поле в G , то $\varphi_* u$ есть левоинвариантное векторное поле в G' . Отсюда следует, что всякий гомоморфизм групп Ли порождает гомоморфизм алгебр Ли, т.е. такое линейное отображение $\varphi_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$, что

$$\varphi_* [u, v] = [\varphi_* u, \varphi_* v] \quad (1)$$

При этом $\text{Ker } \varphi_*$ есть идеал в $\mathfrak{g}$, являющийся алгеброй Ли ядра $\text{Ker } \varphi$, а алгебра Ли подгруппы Ли $\varphi(G)$ есть $\varphi_*(\mathfrak{g})$. Локально, в окрестностях единиц, φ и φ_* связаны с помощью экспоненциального отображения следующим образом:

$$\varphi \circ \exp = \exp \circ \varphi_* \quad (2)$$

Изоморфное отображение группы Ли на себя называется автоморфизмом. Множество всех автоморфизмов $\text{Aut}(G)$ группы Ли есть группа Ли. Однако вместо автоморфизмов группы удобно рассматривать порожденные ими автоморфизмы φ_* алгебры Ли, поскольку

последние являются линейными операторами этой алгебры. Группу всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$ обозначим через $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. В случае связной G она изоморфна $\text{Aut}(G)$. В дальнейшем связность группы G будет всегда предполагаться.

Особое значение имеют внутренние автоморфизмы группы Ли. Они имеют вид $x' = a x a^{-1}$ и образуют подгруппу в $\text{Aut}(G)$. Элементы x и x' называются сопряженными. Мы снова можем рассмотреть дифференциалы внутренних автоморфизмов – линейные операторы $\text{Ad}(a)$ в $\mathfrak{g}$, порожденные элементами $a \in G$. Они образуют подгруппу Ли $\text{Ad}(G) \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$ – группу Ли внутренних автоморфизмов алгебры, которая называется также присоединенной группой.

Центральные элементы $Z \in G$ порождают тождественное преобразование этой группы. Заметим, что подалгебра $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$ является идеалом тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно преобразований присоединенной группы: $\text{Ad}(a)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ для любых $a \in G$.

Алгебра Ли присоединенной группы $\text{ad}(\mathfrak{g})$ называется присоединенной алгеброй. Она образована линейными операторами $\text{ad}(u)$, которые действуют на $\mathfrak{g}$ по правилу $\text{ad}(u)v = [u, v]$.

Пример 1. Рассмотрим группу $GL(n, \mathbb{K})$ и ее отображение на группу $\mathbb{K}_0$ по формуле $\varphi(A) = \det A$. Поскольку $\det A$ есть многочлен от компонент матрицы A , то это отображение аналитично. Кроме того, имеем $\det(AB) = \det A \det B$. Итак, это гомоморфизм групп Ли. Его ядро образовано матрицами, для которых $\det A = 1$. Следовательно, $\text{Ker } \varphi = SL(n, \mathbb{K})$.

Найдем дифференциал этого гомоморфизма. Учитывая правило дифференцирования определителя и вычисляя результат в единице группы $GL(n, \mathbb{K})$, получим $\det_* u = \text{tr } u$. Это гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ на алгебру $\mathbb{K}$. Его ядро образовано матрицами с нулевым следом $\text{tr } u = 0$. Это идеал $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$.

Пример 2. Примером гомоморфизма групп Ли является отображение $\mathbb{R} \rightarrow G$, удовлетворяющее условию $a(t+s) = a(t)a(s)$. Это однопараметрическая подгруппа Ли в G . В силу примера 7, § I ядро этого гомоморфизма либо совпадает с $\mathbb{R}$, либо дискретно. Первый случай тривиален: $a(t) = e$. Во втором случае $a(t)$ либо диффеоморфна $\mathbb{R}$ (если $\text{Ker } \varphi = 0$), либо диффеоморфна окружности.

Рассмотрим, в частности, отображение $\mathbb{R} \rightarrow S^1$, заданное формулой $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$. Оно аналитично и сохраняет групповую операцию: $\varphi(x+y) = e^{2\pi i x} \cdot e^{2\pi i y}$. Его ядро опре -

делено условием $e^{2\pi i x} = 1$ и, следовательно, есть дискретный нормальный делитель $\mathbb{Z}$, образованный целыми числами. Заметим, окрестность нуля $\mathcal{U} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ отображается на $S^1 \setminus \{-1\}$ взаимно однозначно. Следовательно, $\mathcal{U}$ — локальный изоморфизм, хотя не является таковым в целом.

Пример 3. Найдем группу автоморфизмов аддитивной группы Ли $\mathbb{R}$. Они должны удовлетворять условию $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, где $\varphi(x)$ ищутся в классе вещественных аналитических функций. Дифференцируя по x , получим $\varphi'(x+y) = \varphi'(x)$, откуда следует, что $\varphi'(x) = c = \text{const}$. Интегрируя, получим $\varphi(x) = cx + d$. Учет начального условия $\varphi(0) = 0$ дает $d = 0$. Таким образом, группа автоморфизмов образована гомотетиями $\varphi(x) = cx, c \neq 0$.

Пример 4. Пусть алгебра Ли задана структурными уравнениями

$$[e_1, e_2] = 3e_1, \quad [e_1, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_3] = 3e_3.$$

Найдем присоединенную группу $\text{Ad}(G)$. Ее непосредственное нахождение, исходящее из условий инвариантности коммутаторов (I), приводит к громоздкой системе алгебраических уравнений второго порядка. Можно линеаризировать задачу, пожертвовав ее глобальной формулировкой. Мы найдем сначала присоединенную алгебру $\text{ad}(g)$, а затем с помощью экспоненциала искомую локальную группу. Итак, вычисляя присоединенные операторы алгебры $\text{ad}(g)$, найдем

$$\text{ad}(u) = \begin{bmatrix} 3u^2 & -3u^1 & 0 \\ u^3 & 0 & -u^1 \\ 0 & 3u^3 & -3u^2 \end{bmatrix}$$

для всякого $u \in g$. Положим теперь $u = e_1$ и найдем соответствующую однопараметрическую подгруппу. Для этого интегрируем уравнения $\frac{dv}{dt} = \text{ad}(e_1)v$ при начальном условии $v(0) = v$, то

есть систему

$$\frac{dv^1}{dt} = -3v^2, \quad \frac{dv^2}{dt} = -v^3, \quad \frac{dv^3}{dt} = 0.$$

Получим однопараметрическую группу линейных преобразований в g

$$v^1(t) = v^1 - 3v^2t + \frac{3}{2}(t)^2, \quad v^2(t) = v^2 - v^3t, \quad v^3(t) = v^3,$$

с матрицей

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & -3t & \frac{3}{2}(t)^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично, операторы $ad(e_2)$ и $ad(e_3)$ порождают в $\mathfrak{g}$ однопараметрические подгруппы внутренних автоморфизмов с матрицами

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad A_3(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{3}{2}(t)^2 & 3t & 1 \end{bmatrix}.$$

Произвольный внутренний автоморфизм локальной группы $Ad(G)$ находится теперь в виде произведения $A(t^1, t^2, t^3) = A_1(t^1) A_3(t^3) A_2(t^2)$.

Здесь t^1, t^2, t^3 — канонические координаты второго рода на группе $Ad(G)$. При вычислении матрицы A удобно перейти к другим

координатам, положив $t^1 = 2\alpha$, $t^2 = \frac{1}{3} \ln \vartheta$, $t^3 = 2c$. В результате получим

$$A = \begin{bmatrix} p^2 \vartheta & -6\alpha\vartheta & 6\alpha^2/\vartheta \\ 2p\vartheta c & 1-12\alpha c & -2\alpha/\vartheta \\ 6\vartheta c^2 & 6c & 1/\vartheta \end{bmatrix},$$

где $p = 1 - 6\alpha c$, $\vartheta > 0$.

6.1. Доказать, что если гомоморфизм топологической группы G в топологическую группу G' непрерывен в единице $e \in G$, то он непрерывен.

6.2. Пусть φ_1 и φ_2 — гомоморфизмы группы Ли G в группу Ли G' . Доказать, что множество таких $\alpha \in G$, что $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$ является подгруппой Ли $H \subset G$. Найти алгебру Ли этой подгруппы.

6.3. Пусть $\varphi_1 : G_1 \rightarrow H$, $\varphi_2 : G_2 \rightarrow H$ — гомоморфизмы групп Ли в коммутативную группу H . Доказать, что существу-

ет единственный гомоморфизм $\varphi : G_1 \times G_2 \rightarrow H$, ограничение которого на сомножители совпадает с φ_1 и φ_2 соответственно.

6.4. Пусть $\varphi : G \rightarrow G'$ гомоморфизм топологической группы G на топологическую группу G' . Доказать, что полный прообраз подгруппы или нормального делителя из G' есть подгруппа и, соответственно, нормальный делитель в G .

6.5. Пусть $\varphi : G \rightarrow G'$ открытый гомоморфизм топологической группы G на топологическую группу G' . Доказать, что если подгруппа или нормальный делитель в G содержит ядро $\text{Ker } \varphi$, то их образы в G' являются подгруппой и, соответственно, нормальным делителем группы G' .

6.6. Пусть G — связная группа Ли и $\varphi : G \rightarrow H$ гомоморфизм с дискретным ядром. Доказать, что это ядро содержится в центре группы G .

6.7. Доказать, что гомоморфизм групп Ли коммутирует с левыми сдвигами: $\varphi \circ L_a = L_{\varphi(a)} \circ \varphi$.

6.8. Пусть $\varphi : G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп Ли и θ — левоинвариантная 1-форма на H . Доказать, что $(\varphi^* \theta)(u) = \theta(\varphi_* u)$ есть левоинвариантная 1-форма на G .

6.9. Пусть $\varphi : G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп Ли, $\theta^i \in k$ базис левоинвариантных форм на H . Доказать, что уравнения $\varphi^* \theta^i = 0$ определяют идеал $\kappa \subset \mathfrak{g}$. Что это за идеал?

6.10. Пусть φ — гомоморфизм группы Ли G в группу Ли G' . Тогда для любого элемента $u \in \mathfrak{g}$ алгебры Ли группы G

$$\varphi(\exp u) = \exp(\varphi_* u).$$

Доказать.

6.11. Доказать, что при гомоморфизме $\varphi : G \rightarrow G'$ образом производной группы является производная группа.

6.12. Пусть S_n — симметрическая группа подстановок степени n . Каждой подстановке $s \in S_n$ поставим в соответствие

$$n\text{-матрицу } \varphi(s) = E_1^{s(1)} + \dots + E_n^{s(n)}, \text{ где } E_\beta^\alpha \text{ оп-}$$

ределены в примере I § 3. Доказать, что φ есть гомоморфизм группы S_n в группу $GL(n, K)$.

6.13. Исследовать отображение групп Ли $\varphi : C_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$, определяемое формулой $\varphi(z) = |z|$.

6.14. Исследовать отображение групп Ли $\varphi : C \rightarrow C_0$, определяемое формулой $w = e^z$.

6.15. Исследовать отображение групп Ли $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow O(2)$, определяемое формулой

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

6.16. Исследовать отображение группы $\mathbb{R}^n$ в $D(n, \mathbb{C})$, которое элементу $x = (x^1, \dots, x^n)$ ставит в соответствие матрицу

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} e^{x^1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{x^n} \end{bmatrix}.$$

6.17. Пусть G — топологическая аддитивная группа многочленов $P_n = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$ степени $\leq n$, $(\alpha_i \in \mathbb{C})$. Какие из следующих отображений в группу $\mathbb{C}$ являются гомоморфизмами?

- 1) $\varphi_1(P_n) = \alpha_0$; 2) $\varphi_2(P_n) = \bar{\alpha}_0$;
3) $\varphi_3(P_n) = |\alpha_n|$; 4) $\varphi_4(P_n) = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$.

6.18. Показать, что отображение $\varphi : \mathbb{C}_0 \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$,

определяемое формулой $\varphi(a + bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, является гомоморфизмом. Найти его ядро.

6.19. Показать, что группа дробно-линейных преобразований $x = \frac{ax + b}{cx + d}$ гомоморфна группе $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$.

Найти ядро гомоморфизма.

6.20. Показать, что отображение $\varphi : S^3 \rightarrow SO(4, \mathbb{R})$, определенное формулой $\varphi(x) = qxq^{-1}$, где $x, q \in S^3$ — кватернионы единичного модуля, есть гомоморфизм. Найти его образ и ядро.

6.21. Показать, что следующие отображения являются гомоморфизмами групп Ли и найти их ядро:

- 1) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1 : \varphi(x^1, x^2) = x^1$; 2) $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k : \varphi(x^1, \dots, x^n) = (x^1 \dots x^k)$;
3) $\mathbb{R}^1 \rightarrow S^1 : \varphi(x) = e^{ix}$;

4) $\mathbb{R}^n \rightarrow D(n, \mathbb{C}) : \varphi(x^1, \dots, x^n) = \begin{bmatrix} e^{2\pi i x^1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{2\pi i x^n} \end{bmatrix}.$

6.22. Даны следующие гомоморфизмы групп Ли:

$$1) \mathbb{R}^1 \rightarrow SO(2) : \varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}; \quad 2) \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1 : \varphi(t) = e^{it};$$

$$3) GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0 : \varphi(A) = \det A; \quad 4) \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R}) : \varphi(t) = e^{At};$$

$$5) \varphi(A)X = A^T X A.$$

Найти соответствующие гомоморфизмы их алгебр Ли.

6.23. Какие из следующих преобразований на группе $GL(n, \mathbb{C})$ являются автоморфизмами? 1) $A \rightarrow \bar{A}$; 2) $A \rightarrow A^T$;

3) $A \rightarrow A^*$; 4) $A \rightarrow A^{-1}$; 5) $A \rightarrow A^2$.

6.24. Найти группу автоморфизмов следующих групп Ли:

1) $\mathbb{R}^1$; 2) S^1 .

6.25. Доказать, что алгебра Ли группы автоморфизмов односвязной группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна алгебре дифференцирований $D(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$ (зад. 3.29).

6.26. Пусть α — произвольная конечномерная алгебра. Доказать, что группа $Aut(\alpha)$ автоморфизмов алгебры: $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$ есть подгруппа Ли в $GL(\alpha)$. Найти ее алгебру Ли.

6.27. Пусть φ — автоморфизм связной группы Ли и $G(\varphi) \subset G$ множество его неподвижных точек. Доказать, что $G(\varphi)$ есть замкнутая подгруппа в G .

6.28. Доказать, что группа автоморфизмов тора T^n дискретна.

6.29. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли со структурными уравнениями

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_3] = 0.$$

Показать, что линейное преобразование $\varphi : e_1 \rightarrow -e_1, e_2 \rightarrow -e_3, e_3 \rightarrow e_2$ есть автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ порядка 4: $\varphi^4 = I$.

6.30. Найти группу автоморфизмов $Aut(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$[e_1, e_2] = e_1.$$

6.31. Найти группу автоморфизмов алгебры 3-матриц $t_0(3, \mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} 0 & u^1 & u^3 \\ 0 & 0 & u^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.32. Пусть H — замкнутая подгруппа в G . Доказать, что ее образ при любом внутреннем автоморфизме $X' = \alpha X \alpha^{-1}$ есть замкнутая подгруппа.

6.33. Найти внутренние автоморфизмы аффинной группы. Показать, что параллельные переносы образуют ее нормальный делитель.

6.34. Показать, что матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ сопряжены в $SL(2, \mathbb{C})$, но не в $SL(2, \mathbb{R})$.

6.35. Показать, что группы Ли $SU(1, 1)$ и $SL(2, \mathbb{R})$ изоморфны.

§ 7. Факторгруппы. Прямое и полупрямое произведение групп Ли

Пусть $H \subset G$ — замкнутая подгруппа Ли. Подмногообразия $L_a H = aH$ называются левыми смежными классами по этой подгруппе. Отметим, что, они являются классами эквивалентности по отношению $a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$. Аналогично определяются правые смежные классы. Они совпадают лишь тогда, когда H — нормальный делитель. Пусть G/H — множество левых смежных классов. Оно наделяется структурой аналитического многообразия, если потребовать, чтобы каноническое отображение $\omega : G \rightarrow G/H$, которое каждому $a \in G$ ставит в соответствие содержащий его смежный класс $\omega(a) = aH$, было аналитическим. Более того, если H — нормальный делитель, то формула $\omega(ab) = aH \cdot bH$ корректно определяет в G/H аналитическую групповую операцию, превращая тем самым G/H в группу Ли. Она называется факторгруппой группы G по H . Проекция ω является в этом случае гомоморфизмом G на G/H с ядром H .

Обратно, пусть $\omega : G \rightarrow G'$ — аналитический гомоморфизм G на G' и $H = \text{Ker } \omega$ — его ядро. Тогда G' изоморфно факторгруппе G/H .

Все сказанное переносится на алгебры Ли. Если мы имеем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и ее идеал $\mathfrak{h}$, то корректно определен коммутатор смежных классов $[u + \mathfrak{h}, v + \mathfrak{h}] = [uv] + \mathfrak{h}$, который превращает факторпространство $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в алгебру Ли. Она называется факторалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$ по $\mathfrak{h}$. Оказывается, что если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G , а $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли, соответствующая подгруппе Ли H , то алгебра Ли группы G/H изоморфна факторалгебре $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. При этом имеет место канонический гомоморфизм $\omega_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Еще один способ построения новых групп Ли из заданных состоит в следующем. Пусть G_1 и G_2 — группы Ли. Тогда на их про-

изведении $G = G_1 \times G_2$ возникает структура аналитического многообразия, для которой проекции $p_i : G_1 \times G_2 \rightarrow G_i$ на каждый из сомножителей аналитичны. Более того, формула

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2) \quad (I)$$

превращает это произведение в группу Ли. Она называется прямым произведением групп Ли. При этом подгруппы $G'_1 = \{(a_1, e_2)\}$ и $G'_2 = \{(e_1, a_2)\}$ есть коммутирующие нормальные делители, изоморфные соответственно G_1 и G_2 , и имеющие общим элементом лишь единицу e (e_1, e_2). Такие подгруппы называют взаимно простыми. С другой стороны, $G = G'_1 G'_2$ и это представление G в виде произведения однозначно.

Алгебра Ли прямого произведения однозначно представляется в виде прямой суммы $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ с коммутатором

$$[(u_1, u_2), (v_1, v_2)] = ([u_1, v_1], [u_2, v_2]) \quad (2)$$

Слагаемые этой суммы с помощью проекций $(p_i)_*$ отождествляются с идеалами алгебры $\mathfrak{g}$.

Существует более общий способ введения структуры группы Ли на прямом произведении групповых многообразий. Пусть H — группа Ли, $K \subset \text{Aut}(H)$ — некоторая группа ее автоморфизмов. На прямом произведении $G = H \times K$ групповых многообразий зададим групповую операцию следующим образом:

$$(a, A)(b, B) = (aA(b), AB) \quad (3)$$

где $A, B \in K$, $a, b \in H$. Она превращает многообразие G в группу Ли с единицей (e, id) и называется полупрямым произведением $H \rtimes K$. При этом подгруппа $H' = \{(a, id)\}$ изоморфна H и является нормальным делителем, а $(H \times K)/H'$ изоморфна K с помощью отображения $\omega : (a, A) \rightarrow A$. Если $K = \{id\}$ — тождественный автоморфизм, то полупрямое произведение групп Ли превращается в прямое.

Аналогичные конструкции возникают и в алгебрах Ли. Пусть $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ — две алгебры Ли, причем $\mathfrak{m}$ представлена как алгебра линейных операторов дифференцирования алгебры $\mathfrak{h} : u \in \mathfrak{m} \rightarrow D(u)$. Тогда прямую сумму векторных пространств $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ можно

превратить в алгебру Ли, положив $[u, v] = D(u)v$, если $u \in m$, $v \in h$ и определив коммутатор естественным образом в каждом подпространстве. Эта алгебра называется полупрямой суммой заданных алгебр Ли. Непосредственно из определения следует, что

$$[h, h] \subset h, [m, m] \subset m, [h, m] \subset h \dots \quad (4)$$

В частности, $h \subset g$ является идеалом.

Пример 1. Рассматривая в примере I, § 6 гомоморфизм $\det : GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}_0$, мы видели, что его ядром является нормальный делитель $SL(n, \mathbb{K})$. Поэтому $GL(n, \mathbb{K}) / SL(n, \mathbb{K})$ изоморфна мультипликативной группе $\mathbb{K}_0$, а $gl(n, \mathbb{K}) / sl(n, \mathbb{K})$ — коммутативной алгебре $\mathbb{K}$.

Пример 2. Пусть $\mathbb{R}$ — аддитивная группа вещественных чисел и $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ — подмножество целых чисел. Это дискретный и, следовательно, замкнутый нормальный делитель. Смежные классы $L_\alpha \mathbb{Z}$ состоят из чисел $\{m + \alpha\}$. Каждый из них однозначно определен числом $0 \leq \alpha \leq 1$, причем числа $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ порождают один и тот же класс. Поэтому факторгруппа $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ есть одномерный тор T^1 , в котором групповая операция определена равенством $s \equiv a + b \pmod{\mathbb{Z}}$. Это группа Ли, изоморфная группе S^1 комплексных чисел единичного модуля: $\varphi(\alpha) = e^{2\pi i \alpha}$.

Многомерным обобщением этой группы является n -мерный тор $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, где $\mathbb{Z}^n$ состоит из точек $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ с целыми координатами (целочисленная решетка). Групповая операция определена равенством $s^i = \alpha^i + \beta^i \pmod{\mathbb{Z}}$. Это n -мерная коммутативная группа Ли, локально изоморфная $\mathbb{R}^n$.

Пример 3. Пусть $GL^+(n, \mathbb{R})$ — группа Ли n -матриц с положительным определителем. Подгруппа $SL(n, \mathbb{R})$ и подгруппа $\mathbb{R}^+$ скалярных матриц λI , $\lambda > 0$ есть ее нормальные делители, коммутирующие между собой. Из $\det(\lambda I) = \lambda^n = 1$ следует $\lambda = 1$. Таким образом, эти подгруппы Ли взаимно просты. С другой стороны, всякая матрица $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$ может быть однозначно представлена в виде произведения $A = \lambda I \cdot A_1$, где $A_1 \in SL(n, \mathbb{R})$. Действительно, из этого равенства λ определяется однозначно: $\lambda = \sqrt[n]{\det A}$. Поэтому $GL^+(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \times SL(n, \mathbb{R})$. Переходя к алгебрам Ли, получим разложение в прямую сумму $gl(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus sl(n, \mathbb{R})$. Здесь $\mathbb{R}$ представлена как алгебра Ли скалярных вещественных матриц.

Пример 4. Если в полупрямом произведении $H \rtimes K$ нормальный делитель H есть аддитивная векторная группа, а автоморфизмы A действуют на H как линейные операторы, то закон группового умножения (3) записывается в аддитивной форме $(\alpha, A)(\beta, B) = (\alpha + A\beta, AB)$. Классическим примером является группа $GA(n)$ аффинных преобразований в $\mathbb{R}^n$: $x' = Ax + \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}^n$ и $A \in GL(n, \mathbb{R})$. $GA(n)$ изоморфна группе Ли $(n+1)$ - матриц вида $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Их умножение дает

$$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & \alpha + A\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ соответствуют центроаффинным преобразованиям и образуют подгруппу Ли. При $A = I_n$ получаем параллельные переносы с матрицами $\begin{bmatrix} I_n & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, образующие нормальный коммутативный делитель, изоморфный $\mathbb{R}^n$. Эти подгруппы взаимно просты. В то же время произведения их элементов, очевидно, исчерпывают всю группу $GA(n)$. Таким образом, имеем полупрямое произведение $GA(n) = \mathbb{R}^n \rtimes GL(n, \mathbb{R})$ групп Ли и соответствующую ему полупрямую сумму $ga(n) = \mathbb{R}^n \oplus gl(n, \mathbb{R})$ алгебр Ли.

7.1. Доказать, что умножение смежных классов в факторгруппе G/N не зависит от выбора их представителей, т.е. если $\alpha' \in \alpha N$, $\beta' \in \beta N$, то $\alpha\beta N = \alpha'\beta' N$.

7.2. Пусть G_e - связная компонента единицы топологической группы G . Доказать, что связной компонентой элемента $\alpha \in G$ является смежный класс αG_e .

7.3. Найти смежные классы группы Ли $\mathbb{R}$ по подгруппе $\mathbb{Z}$.

7.4. Найти левые и правые смежные классы по подгруппе $S^1 \subset S^3$ кватернионов вида $q = e^{i\alpha}$.

7.5. Найти смежные классы группы $GL(n, \mathbb{K})$ по подгруппе $SL(n, \mathbb{K})$.

7.6. Естественное действие группы $GL(n+1, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^{n+1}$ линейными операторами проектируется в проективное пространство $P^n = \mathbb{R}_0^{n+1} / H$, где H - группа гомотетий. Показать, что проективная группа $GP(n)$ изоморфна $SL(n+1)$, если n четно и $SL(n+1)/\mathbb{Z}_2$ при нечетном n .

7.7. Показать, что $G \times H / G \cong H$ и $G \times H / H \cong G$.

7.8. Доказать, что факторгруппа связной топологической группы связна.

7.9. Найти следующие факторгруппы:

- а) $\mathbb{R}_0 / \mathbb{R}_+$; б) $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}^m$ ($m \leq n$) ; в) $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$; г) $\mathbb{C}_0 / \mathbb{R}_0$;
 д) $\mathbb{C}_0 / S^1$; е) $S / \mathbb{Z}_n$; ж) $\mathbb{C}_0 / \mathbb{Z}_n$.

7.10. В аддитивной группе $\mathbb{R}^n$ задано векторное подпространство V^k . Найти факторгруппу $\mathbb{R}^n / V^k$.

7.11. Найти факторгруппу $O(n, \mathbb{R}) / SO(n, \mathbb{R})$.

7.12. Показать, что отображение $\varphi(A) = \frac{\det A}{|\det A|}$ является гомоморфизмом группы Ли $U(n)$ на S^1 . Найти его ядро и показать, что $U(n) / SU(n) \cong S^1$.

7.13. Проверив, что $\mathcal{N} = \{I, -I\}$ есть дискретный нормальный делитель группы $SU(2)$, найти факторгруппу $SU(2) / \mathcal{N}$.

7.14. Найти следующие факторгруппы:

- а) $GL(n, \mathbb{R}) / SL(n, \mathbb{R})$; б) $GL(n, \mathbb{R}) / GL^+(n, \mathbb{R})$;
 в) $GL(n, \mathbb{C}) / SL(n, \mathbb{C})$; г) $GL(n, \mathbb{C}) / \mathcal{N}$,

где $GL^+(n, \mathbb{R})$ подгруппа Ли матриц с положительным определителем;

$\mathcal{N}$ – подгруппа Ли матриц, для которых $\arg(\det A) = 0$.

7.15. Показать, что $SO(3, 1) \cong SL(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2$.

7.16. Пусть G – группа Ли матриц $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$. Показав, что матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ образуют в ней замкнутый нормальный делитель $\mathcal{N}$, найти факторгруппу $G / \mathcal{N}$.

7.17. Пусть $GA(n, \mathbb{R})$ – группа аффинных преобразований, $\mathcal{N}$ – подмножество параллельных переносов. Доказать, что $\mathcal{N}$ – нормальный делитель в $GA(n, \mathbb{R})$ и найти факторгруппу $GA(n, \mathbb{R}) / \mathcal{N}$.

7.18. Показать, что последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} GA(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\psi} GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow I$$

точна, т.е. каждый ее член есть образ предыдущего и ядро последующего гомоморфизма. Найти соответствующую ей последовательность алгебр Ли.

7.19. Существует ли группа Ли G и ее нормальный делитель $\mathcal{N} \neq \{e\}$ такие, что $G / \mathcal{N} \cong G$? Привести пример.

7.20. Найти все замкнутые подгруппы в $\mathbb{R}^n$.

7.21. Показать, что множество матриц вида $A = \text{diag}\{e^{ix^1}, \dots, e^{ix^n}\}$, $x^i \in \mathbb{R}$ есть группа Ли, изоморфная тору T^n .

7.22. Пусть $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ естественный гомоморфизм группы $\mathbb{R}^2$ на тор. В $\mathbb{R}^2$ задана замкнутая подгруппа H — прямая с угловым коэффициентом α . Доказать, что $\omega(H)$ замкнута в T^2 лишь тогда, когда α — рациональное число. Доказать также, что если α — иррациональное, то $\omega(H)$ есть всюду плотное подмножество в T^2 (иррациональная обмотка тора).

7.23. Доказать, что всякая факторгруппа группы $\mathbb{R}^n$ изоморфна прямому произведению $T^k \times \mathbb{R}^m$, где $0 \leq k+m \leq n$.

7.24. Пусть G — прямое произведение топологических групп $G_1, \dots, G_k$. Любому элементу $a_i \in G_i$ поставим в соответствие элемент $\varphi(a_i) = (e_1, \dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots, e_k) \in G$, где e_i — единица группы G_i . Доказать, что φ есть инъективный гомоморфизм топологической группы G_i в топологическую группу G .

7.25. Пусть G, H — группы Ли и $G \times H$ — их прямое произведение. Показать, что проекции $p_1 : G \times H \rightarrow G$, $p_2 : G \times H \rightarrow H$ являются гомоморфизмами. Найти их ядра.

7.26. Пусть G_1, G_2 — группы Ли и $G = G_1 \times G_2$. Пусть $N_1 \subset G_1$ и $N_2 \subset G_2$ — их замкнутые нормальные делители и $N = N_1 \times N_2$. Доказать, что $G/N \cong G_1/N_1 \times G_2/N_2$.

7.27. Доказать, что центр прямого произведения топологических групп есть прямое произведение центров сомножителей.

7.28. Пусть H — связная, K — дискретная топологическая группа. Найти связные компоненты группы $G = H \times K$.

7.29. Доказать, что прямое произведение компактных топологических групп компактно.

7.30. Доказать, что $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^1$; $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}_0^1 \times \dots \times \mathbb{R}_0^1$; $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^1 \times \dots \times \mathbb{C}^1$; $\mathbb{C}_0^n = \mathbb{C}_0^1 \times \dots \times \mathbb{C}_0^1$; $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ — это разложения в прямые произведения групп Ли.

7.31. Всякое комплексное число $z \in \mathbb{C}_0$ однозначно представляется в виде $z = re^{i\varphi}$. Означает ли это, что $\mathbb{C}_0$ распадается в прямое произведение групп $S^1 \times \mathbb{R}_+$?

7.32. Всякая комплексная диагональная n -матрица однозначно

представляется в виде $A = \begin{bmatrix} z^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\varphi^1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi^n} \end{bmatrix}$, где

$z^i > 0, \varphi^i \in \mathbb{R}$. Означает ли это, что группа $D(n, \mathbb{C})$ распадается в прямое произведение $D^+(n, \mathbb{R}) \times T^n$?

7.33. Доказать, что группа Ли $D(n, \mathbb{K})$ диагональных матриц $\begin{bmatrix} x^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x^n \end{bmatrix}$ изоморфна прямому произведению n экземпляров группы $\mathbb{K}_0$.

7.34. Доказать справедливость следующих разложений в прямое произведение: 1) $GL(n, \mathbb{C}) = SL(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}_0$; ; 2) $U(n) = SU(n) \times S$.

7.35. Доказать, что: 1) группа $SO(4, \mathbb{R})$ изоморфна факторгруппе $SU(2) \times SU(2) / \mathbb{Z}_2$; 2) группа $SO(4, \mathbb{C})$ изоморфна факторгруппе $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2$.

7.36. Доказать изоморфизм следующих алгебр Ли: 1) $SO(4) \cong SO(3) \oplus SO(3)$; 2) $SO(2, 2) \cong sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R})$.

7.37. Группу Ли 2-матриц вида $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$, $a \neq 0$ представить в виде полупрямого произведения двух групп Ли.

7.38. Показать, что группа Ли комплексных 3-матриц $\begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 & z \\ 0 & e^{i\beta} & w \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $z, w \in \mathbb{C}$ изоморфна полупрямому произведению $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{C}^2$.

7.39. Показать, что группа движений евклидова пространства E^n есть полупрямое произведение $\mathbb{R}^n \ltimes O(n, \mathbb{R})$.

7.40. В группе Ли $T(n, \mathbb{R})$ дана подгруппа Ли $\mathcal{N}$, образованная матрицами $\begin{pmatrix} I_p & A \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, и подгруппа Ли $\mathcal{H}$, образованная матрицами $\begin{pmatrix} T_p & 0 \\ 0 & T_q \end{pmatrix}$, где T_p, T_q — унипотентные блоки. Имеем $\mathcal{N} \cap \mathcal{H} = I_n$. Означает ли это, что $T(n, \mathbb{R}) = \mathcal{N} \times \mathcal{H}$ — прямое произведение?

7.41. Трёхмерная группа G задана законом умножения $(a^1, a^2, a^3)(b^1, b^2, b^3) = (a^1 + b^1, a^2 + b^2, a^3 + b^3 + a^1 b^2)$. Показать, что G является полупрямым произведением нормального делителя $\mathcal{N} : a^1 = 0$ и центра $\mathcal{Z} : a^2 = a^3 = 0$.

7.42. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — полупрямая сумма алгебр Ли. Доказать, что каноническое отображение $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ индуцирует изоморфизм $\mathfrak{m}$ на $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

§ 8. Линейные представления

Линейное представление группы G — это ее гомоморфизм φ в группу Ли $GL(V)$ линейных операторов векторного пространства. Говорят также, что задано действие группы на векторном пространстве. Если $\text{Ker } \varphi = \{e\}$, то представление называют точным или эффективным. Мы будем рассматривать лишь конечномерные представления размерности $n = \dim V$. Выбор базиса в V позволяет заменить $GL(V)$ на $GL(n, K)$. В этом случае говорят о матричном представлении. Линейные представления $\varphi_1: G \rightarrow GL(V_1)$ и $\varphi_2: G \rightarrow GL(V_2)$ называются эквивалентными, если существует линейный изоморфизм $L: V_1 \rightarrow V_2$ такой, что $L \circ \varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha) \circ L$ для любого $\alpha \in G$.

Векторное подпространство $V_1 \subset V$ называется инвариантным относительно представления (или G -инвариантным), если $\varphi(\alpha)V_1 \subset V_1$ для любого $\alpha \in G$. Выбирая базис в V таким образом, чтобы $e_1, \dots, e_k \in V_1$, получим матрицы операторов представления в виде

$$\varphi(\alpha) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\alpha) & \varphi_3(\alpha) \\ 0 & \varphi_2(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Здесь $\varphi_1(\alpha)$ дают представление группы G в подпространстве V_1 — подпредставление, а $\varphi_2(\alpha)$ — представление G в факторпространстве V/V_1 — факторпредставление.

Представление φ называется неприводимым, если оно не имеет нетривиальных инвариантных подпространств и вполне приводимым, если V разлагается в прямую сумму $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ инвариантных неприводимых подпространств. Выбрав базис в V адаптированным к этому разложению, мы приведем матрицы всех операторов представления к блочно-диагональному виду

$$\varphi(\alpha) = \begin{bmatrix} \varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_s \end{bmatrix},$$

где каждое φ_i реализует неприводимое подпредставление. В этом случае говорят, что φ разложено в сумму неприводимых представле-

ний: $\varphi = \varphi_1 \oplus \dots \oplus \varphi_s$. Некоторые из них могут оказаться эквивалентными. Учитывая "подобные члены", пишут $\varphi = \kappa_1 \varphi_1 \oplus \dots \oplus \kappa_t \varphi_t$.
Обратно, если заданы представления $\varphi_1: G \rightarrow GL(V_1)$ и $\varphi_2: G \rightarrow GL(V_2)$, то их сумма в пространстве $V_1 \oplus V_2$ определяется формулой

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(\alpha)(x_1 + x_2) = \varphi_1(\alpha)x_1 + \varphi_2(\alpha)x_2.$$

Если при этом φ_1, φ_2 неприводимы, то $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ будет вполне приводимым.

Другой способ построения новых представлений – тензорное произведение представлений $\varphi_1 \otimes \varphi_2$. Оно определяется в тензорном произведении векторных пространств $V = V_1 \otimes V_2$ формулой

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\alpha) = \varphi_1(\alpha) \otimes \varphi_2(\alpha).$$

Можно, в частности, говорить о тензорной степени $\otimes^s \varphi$ заданного представления. В базисе $e_\alpha \otimes e_\beta$ тензорное произведение реализуется кронекеровским произведением соответствующих матриц

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_1^\alpha & \varphi_2^\beta \\ \varphi_1^\beta & \varphi_2^\gamma \end{pmatrix}.$$

Всякое представление φ в V порождает сопряженное (или контраградиентное) представление в V^* , порожденное сопряженными операторами $\varphi(\alpha) = \varphi(\bar{\alpha}^{-1})^*$ (или $\varphi(\alpha) = \varphi(\bar{\alpha}^{-1})^T$ в вещественном случае). Комбинации сопряжений и тензорных степеней приводят к понятию тензорного представления $\otimes^s \varphi \otimes^z \hat{\varphi}$. Оно реализуется линейными преобразованиями полинейных форм:

$$\Phi(\{^1, \dots, \{^z, x_1, \dots, x_s) \rightarrow \Phi(\{^1 \varphi, \dots, \{^z \varphi, \varphi^{-1} x_1, \dots, \varphi^{-1} x_s).$$

Важнейшим инструментом при изучении представления является его характер $\chi_\varphi(\alpha) = \text{tr} \varphi(\alpha)$. В силу свойств следа матрицы он не зависит от выбора базиса. Характеры эквивалентных представлений совпадают. Замечательно, что и обратно, если два неприводимых представления имеют одинаковые характеры, то они эквивалентны.

Если φ – представление группы Ли, то возникает линейное представление ее алгебры Ли $\varphi_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. По свойству гомоморфизмов оно сохраняет коммутатор $\varphi_*([u, v]) = \varphi_*(u)\varphi_*(v) - \varphi_*(v)\varphi_*(u)$. Обратно, если группа G связна, то всякое ее линейное представление однозначно определяется представлением ее алгебры Ли.

Часто представление группы G рассматривается не произвольными линейными операторами, а лишь в классе операторов некоторой подгруппы $H \subset GL(V)$. Если, например, $H = U(n)$, то представление называется унитарным. Это значит, что операторы $\varphi(\alpha)$ должны сохранять скалярное произведение: $(\varphi^*(\alpha)x, \varphi(\alpha)y) = (x, y)$. В соответствующем базисе $\varphi^*(\alpha) \varphi(\alpha) = I$. Унитарное представление всегда вполне приводимо (в частности, неприводимо). Действительно, если $L \subset V$ инвариантное подпространство, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ будет также инвариантно. Это позволяет, в свою очередь, доказать полную приводимость всякого комплексного представления компактной (в частности, конечной) группы.

Пример I. Пусть $\mathbb{R}^1$ — аддитивная группа Ли вещественных чисел. Рассмотрим некоторые ее простейшие представления.

а) Гомоморфизм $\mathbb{R}^1 \rightarrow SO(2) : \varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$

является представлением $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^2$. Его ядро $\text{Ker } \varphi$ изоморфно $\mathbb{Z}$. Так как вращения в $\mathbb{R}^2$ не имеют инвариантных подпространств, то это представление неприводимо.

б) Гомоморфизм $\varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ является представлением группы $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^2$. Оно точное и реализуется группой сдвигов $x^1 = x^1 + tx^2$, $x^2 = x^2$. Его инвариантные векторные подпространства ищем из условия $\varphi(t)x = \lambda(t)x$. Получаем систему уравнений $x^1 + tx^2 = \lambda(t)x^1$, $x^2 = \lambda(t)x^2$, из которой следует, что единственное нетривиальное инвариантное подпространство задается вектором $e = (1, 0)$. Представление, следовательно, приводимо, но не вполне приводимо.

в) Гомоморфизм $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$ представляет группу $\mathbb{R}^1$ группой $SO_e(1, 1)$ псевдоевклидовых вращений в $\mathbb{R}^2$. Для нахождения инвариантных подпространств получим систему

$$x^1(\cosh t - \lambda(t)) + x^2 \sinh t = 0, \quad x^1 \sinh t + x^2(\cosh t - \lambda(t)) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 2\lambda \cosh t + 1 = 0$ и имеет два вещественных корня $\lambda_{1,2} = \cosh t \pm \sinh t$. Это дает две инвариантные прямые с направляющими векторами $e_1 = (1, 1)$ и $e_2 = (1, -1)$ — изотропные прямые псевдоевклидовой метрики.

Пример 2. Найдем все одномерные комплексные представления группы $\mathbb{R}^1$. Они задаются аналитической функцией $\varphi(t)$ на $\mathbb{R}^1$, удовлетворяющей условиям $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$, $\varphi(0) = 1$. Решение имеет вид $\varphi(t) = e^{ct}$, где c — некоторая комплексная константа.

Найдем среди этих представлений унитарные. Эрмитова метрика на $\mathbb{C}$ имеет вид $\varphi(X, X) = X \bar{X}$. Поэтому условие унитарности дает $e^{ct} e^{\bar{c}t} = 1$, откуда $c + \bar{c} = 0$ и, следовательно, $c = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Таким образом, функции $\varphi(t) = e^{i\alpha t}$ дают полный набор унитарных представлений группы $\mathbb{R}^1$.

Пример 3. Пусть $\mathbb{H}$ — тело кватернионов (§2, пример 4), $\mathbb{R}^3$ — содержащееся в нем трехмерное пространство чисто мнимых кватернионов $x = x^1 i + x^2 j + x^3 k$, ($\bar{x} = -x$), S^3 — группа Ли кватернионов единичного модуля, связная, односвязная и компактная. Отметим, что в $\mathbb{R}^3$ есть евклидова метрика $|x|^2 = x \bar{x}$. Каждому $\alpha \in S^3$ поставим в соответствие преобразование $\varphi(\alpha)x = \alpha x \alpha^{-1}$. Это линейный оператор в $\mathbb{R}^3$, поскольку из $\bar{x} = -x$ следует, что $\bar{x}' = \overline{\alpha x \alpha^{-1}} = \bar{\alpha}^{-1} \bar{x} \bar{\alpha} = -\alpha x \alpha^{-1} = -x'$. Это ортогональный оператор, поскольку $|x'| = |\alpha| |x| |\alpha^{-1}| = |x|$. Так как группа S^3 связна, то мы имеем гомоморфизм $\varphi: S^3 \rightarrow SO(3)$. Найдем его ядро. Из условия $\alpha x \alpha^{-1} = x$ следует $\alpha x = x \alpha$. Полагая здесь $x = i$, а затем $x = j$, получим, что этому равенству удовлетворяют при произвольном x лишь $\alpha = \pm 1$. Итак, $\text{Ker } \varphi = \mathbb{Z}_2$. Это значит, что образ $\varphi(S^3) \subset SO(3)$ трехмерен, а так как S^3 связно, то он также связан. В силу теоремы Шрейера отсюда заключаем, что $\varphi(S^3) = SO(3)$. Таким образом, построено линейное представление группы S^3 в виде группы собственных вращений трехмерного евклидова пространства. Ясно, что это представление неприводимо.

8.1. Показать, что следующие линейные группы Ли задают матричные представления группы $\mathbb{R}$:

$$1) \varphi_1(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}; \quad 2) \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix};$$

$$3) \varphi_3(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad 4) \varphi_4(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}; \quad 5) \varphi_5(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

Какие из них эквивалентны?

8.2. Аддитивная группа $\mathbb{R}^1$ представлена на линейной оболочке $\{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ формулами

$$\varphi(x) \cos \alpha = \cos(\alpha + x), \quad \varphi(x) \sin \alpha = \sin(\alpha + x).$$

Найти матрицу представления.

8.3. Для аддитивной группы $\mathbb{R}^1$ рассмотрим два линейных представления: 1) $x' = x + t$; 2) $z' = e^{it} z$, где $t \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$. Являются ли они изоморфными?

8.4. Доказать, что всякое одномерное представление прямого произведения групп $G = G_1 \times \dots \times G_k$ задается формулой $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \varphi_1(\alpha_1) \varphi_2(\alpha_2) \dots \varphi_k(\alpha_k)$, где $\alpha_i \rightarrow \varphi_i(\alpha_i)$ — одномерные представления групп G_i ($i = 1, \dots, k$).

8.5. Найти все одномерные представления группы Ли $\mathbb{C}$. При каком условии они унитарны?

8.6. Найти все одномерные представления группы Ли S^1 . Показать, что они унитарны.

8.7. Найти все одномерные представления группы Ли T^1 . Показать, что они унитарны.

8.8. Найти все одномерные представления следующих групп Ли: а) $\mathbb{R}_+$; б) $\mathbb{R}_0$; в) $\mathbb{C}_0$.

Найти условия, при которых они унитарны.

8.9. Найти все одномерные представления следующих групп Ли: 1) $\mathbb{R}^n$; 2) $\mathbb{C}^n$; 3) $\mathbb{C}_0^n$; 4) T^n .

При каких условиях они унитарны?

8.10. Показать, что формула $(\varphi(t)\rho)(x) = \rho(x+t), t \in \mathbb{R}$ задает линейное представление группы $\mathbb{R}$ в пространстве многочленов $\rho(x)$ степени $\leq n$. Найти инвариантные подпространства. Показать, что оно приводимо, но не вполне приводимо.

8.11. Пусть V — векторное пространство однородных многочленов $\rho(z^1, z^2)$ степени n от двух комплексных переменных. Доказать, что формула $(\varphi(A)\rho)(z^1, z^2) = \rho(\alpha z^1 + \beta z^2, -\bar{\beta} z^1 + \bar{\alpha} z^2)$ определяет неприводимое представление группы $SU(2)$ степени $n+1$.

8.12. Проверить, что формула

$$\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

задает линейное представление группы $\mathbb{R}^1$ в E^3 . Является ли оно приводимым, вполне приводимым?

8.13. Доказать, что: 1) всякое матричное представление группы Ли $\mathbb{R}^1$ имеет вид матричной экспоненты $\varphi(t) = e^{tA}$; 2) представления $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда матрицы A_1 и A_2 подобны.

8.14. Выяснить при каком условии матричное представление $\varphi(t) = e^{tA}$ группы Ли $\mathbb{R}^1$ вполне приводимо.

8.15. Пусть V – векторное пространство симметричных 2-матриц $X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$. Показать, что формула $X' = A X A^T$ определяет представление группы Ли $GL(2, \mathbb{R})$. Найти матричные элементы представления в стандартном базисе.

8.16. Пусть V^4 – векторное пространство эрмитовых 2-матриц $X = \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$. Показать, что формула $\varphi(A)X = A X A^*$ определяет линейное представление группы $SL(2, \mathbb{C})$. Вывести отсюда, что $SL(2, \mathbb{C})$ гомоморфна группе $SO_e(3, 1)$.

8.17. Пусть V^3 – векторное пространство эрмитовых 2-матриц с нулевым следом $X = \begin{bmatrix} x & y+iz \\ y-iz & -x \end{bmatrix}$. Показать, что $\varphi(A)X = A X A^*$ определяет представление группы Ли $SU(2)$ в V^3 . Найти его матричные элементы, принимая (x, y, z) за координаты.

8.18. Показать, что формула

$$\varphi(q) = \begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix}, \quad q \in \mathbb{H}_0,$$

где i – мнимая единица, задает точное линейное представление группы кватернионов $\mathbb{H}_0$.

8.19. Пусть V – пространство билинейных форм и $(\varphi(A)\varphi)(x, y) = \varphi(Ax, Ay)$, $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Показать, что эта формула задает линейное представление группы $GL(n, \mathbb{R})$ в V . Доказать, что оно вполне приводимо и найти инвариантные подпространства.

8.20. Выяснить, какие из следующих формул определяют линейное представление группы $GL(n, \mathbb{R})$ в пространстве n -матриц: 1) $\varphi(A)X = AX$; 2) $\varphi(A)X = XA^{-1}$; 3) $\varphi(A)X = AXA^{-1}$; 4) $\varphi(A)X = AXA^T$; 5) $\varphi(A)X = A X A$; 6) $\varphi(A)X = X + A$?

8.21. Доказать, что линейное представление $\varphi(A)X = AX$ в

пространстве n -матриц вполне приводимо, а его φ -неприводимые инвариантные подпространства есть идеалы алгебры $M(n, K)$. Найти их.

8.22. Пусть $M(n, K)$ - пространство n -матриц. Доказать, что представление группы $GL(n, K)$, определенное формулой $\varphi(A)x = Ax A^{-1}$ вполне приводимо и найти инвариантные подпространства.

8.23. Представление группы $GL(n, R)$ в пространстве билинейных форм определено формулой $(\varphi(A)\varphi)(x, y) = \varphi(Ax, Ay)$, $A \in GL(n, R)$. Найти его дифференциал.

8.24. Доказать, что представление связной группы Ли однозначно определяется представлением ее алгебры Ли.

8.25. Пусть G - группа Ли и φ - ее представление в V . Доказать, что если G связна, то из φ_* -инвариантности подпространства $L \subset V$ вытекает его φ' -инвариантность.

8.26. Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли и φ - ее линейное представление. Доказать, что $B_{\varphi}(u, v) = \text{tr}(\varphi(u)\varphi(v))$, где $u, v \in \mathfrak{g}$ есть инвариантная симметричная билинейная форма на $\mathfrak{g}$.

8.27. Лемма Шура: Пусть φ и ψ - неприводимые представления топологической группы G в пространствах L и V и пусть $A: L \rightarrow V$ - линейное отображение, удовлетворяющее условию $A\varphi(a) = \psi(a)A$ для любых $a \in G$. Тогда либо A есть линейный изоморфизм L на V , и тогда $\varphi \sim \psi$, либо $A = 0$. Доказать.

8.28. Пусть φ - неприводимое представление топологической группы G в комплексном пространстве V . Тогда всякий линейный оператор, коммутирующий со всеми операторами представления, имеет вид $A = \lambda I$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Доказать.

8.29. Доказать, что если группа G коммутативна, то всякое ее комплексное неприводимое представление одномерно.

8.30. Пусть G - группа, действующая неприводимо в $\mathbb{R}^n$. Тогда всякий линейный оператор в $\mathbb{R}^n$, коммутирующий с G , является либо скалярным ($A = \lambda I, \lambda \in \mathbb{R}$), либо $A = \lambda I + \mu J$, $J^2 = -I$ при четном n .

8.31. Пусть φ и ψ - два линейных представления группы G в пространствах L и V . Доказать, что множество $S\mathcal{L}$ всех сплетающих операторов: $A\varphi = \psi A$ есть векторное подпространство в пространстве $\mathcal{L}(L; V)$ всех линейных операторов $L \rightarrow V$.

8.32. Пусть φ , ψ – представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространствах L и V , $\mathcal{L}(V; L)$ – векторное пространство всех линейных отображений из V в L . Показать, что формула $\varphi(\nu)A = \varphi(\nu)A - A\psi(\nu)$, где $\nu \in \mathfrak{g}$, $A \in \mathcal{L}(V; L)$ определяет линейное представление алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathcal{L}(V; L)$.

8.33. Пусть φ – линейное представление группы G в пространстве V . Доказать, что множество $\mathcal{A}$ всех коммутирующих операторов $A: A\varphi = \varphi A$ есть подалгебра в алгебре всех линейных операторов пространства V .

8.34. Пусть φ – представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в V и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – ее идеал. Доказать, что подпространство $L = \{x \in V: \varphi(\mathfrak{h})x = 0\}$ $\mathfrak{g}$ -инвариантно.

8.35. Пусть φ – представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в V и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – идеал. Доказать, что $L = \varphi(\mathfrak{h})V \subset V$ есть $\mathfrak{g}$ -инвариантное подпространство.

8.36. Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ – разложение в прямую сумму φ -инвариантных подпространств. Доказать, что проекция $V_1 \oplus V_2 \rightarrow V_1$ является морфизмом представления φ в представление φ_1 .

8.37. Пусть φ – унитарное представление группы G в V , $L \subset V$ – векторное подпространство и $\rho: V \rightarrow L$ – проектор. Доказать, что L φ -инвариантно тогда и только тогда, когда ρ коммутирует с представлением: $[\rho, \varphi(a)] = 0$ для каждого $a \in G$.

8.38. Доказать, что любое комплексное (вещественное) линейное представление компактной группы Ли эквивалентно некоторому унитарному (ортогональному).

8.39. Пусть φ – унитарное представление группы G и $L \subset V$ – инвариантное подпространство. Тогда ортогональное дополнение $L^\perp$ также инвариантно. Доказать.

8.40. Доказать, что всякое унитарное представление вполне приводимо.

8.41. Доказать, что унитарное представление φ группы G в V неприводимо тогда и только тогда, когда единственными операторами, коммутирующими с представлением, являются скалярные операторы.

8.42. Доказать, что всякое представление конечной группы G вполне приводимо.

8.43. Показать, что если операторы $\varphi_*(a)$ представления алгебры Ли кососимметричны или косоэрмитовы, то это представление вполне приводимо.

8.44. Доказать, что всякая компактная группа Ли изоморфна некоторой подгруппе в унитарной группе Ли $U(n)$ при некотором n .

8.45. Показать, что подпространства симметричных $S^p(V)$ и кососимметричных $\Lambda^p(V)$ тензоров в V^p являются инвариантными подпространствами тензорного представления. Найти их размерность. Рассмотреть случай $p = 2$.

8.46. Пусть V — векторное пространство с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$ и S_n — симметрическая группа подстановок. Показать, что формула $\varphi(s)e_\alpha = e_{s(\alpha)}$, $s \in S_n$ задает ее линейное представление. Найти матрицы операторов $\varphi(s)$ в указанном базисе. Рассмотреть случаи $n = 2$, $n = 3$.

8.47. Доказать, что тензорное представление в V^p коммутирует с представлением симметрической группы S_p (задача 8.46).

8.48. Вычислить характер представления группы $SU(2)$, заданного в задаче 8.II.

§ 9. Присоединенное представление

Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Рассмотрим группу $Aut(G)$ автоморфизмов группы G . Всякому автоморфизму φ поставим в соответствие его дифференциал φ_* . Тогда получим отображение $Aut(G) \rightarrow Aut(\mathfrak{g})$, которое является линейным представлением группы $Aut(G)$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Если G связна, то это представление точное.

Рассмотрим теперь сужение этого представления на подгруппу внутренних автоморфизмов $Int(a)x = axa^{-1}$. Это нормальный делитель в $Aut(G)$. Переходя к дифференциалу, получим следующее отображение

$$Ad : a \in G \rightarrow Ad(a) = Int_*(a)$$

группы G в группу $Aut(\mathfrak{g})$ автоморфизмов алгебры. Как и всякие автоморфизмы алгебры, операторы $Ad(a)$ сохраняют коммутатор: $Ad(a)[u, v] = [Ad(a)u, Ad(a)v]$ для любого $a \in G$. Отображение $Ad : G \rightarrow Aut(\mathfrak{g})$ является аналитическим гомоморфизмом: $Ad(ab) = Ad(a) \circ Ad(b)$ и называется присоединенным представлением группы G в алгебре $\mathfrak{g}$. Очевидно, центр группы $Z \subset Ker(Ad)$. Если же группа G связна, то $Z = Ker(Ad)$.

Изучение присоединенного представления группы G важно потому, что оно строится на алгебре Ли самой группы. Поэтому оно существенным образом отражает ее строение.

В целях линеаризации задачи, целесообразно перейти от самого присоединенного представления к его дифференциалу $ad = Ad_*$. Тогда получим присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$ в алгебре дифференцирований этой алгебры $D(\mathfrak{g})$, но дифференцирований специального вида $ad: u \in \mathfrak{g} \rightarrow ad(u): ad(u)v = [u, v]$. Такие дифференцирования называются внутренними. Ядром этого представления является центр Z алгебры $\mathfrak{g}$. Следовательно, $ad(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/Z$. Алгебра $ad(\mathfrak{g}) \subset D(\mathfrak{g})$ называется присоединенной. Переход от присоединенной алгебры к присоединенной группе делается, как обычно, с помощью экспоненциального отображения:

$$Ad(a) = \exp(ad(u)), \quad a = \exp(u).$$

Пример I. Рассмотрим полную линейную группу $GL(n, \mathbb{K})$ и ее алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Внутренними автоморфизмами группы являются преобразования $Int(A)X = AXA^{-1}$. Неподвижные элементы образуют центр группы, состоящий из скалярных матриц. Поэтому группа $Int(GL(n, \mathbb{K}))$ изоморфна специальной линейной группе $SL(n, \mathbb{K})$.

Пусть $X(t)$ — кривая, выходящая из единицы и $X(0) = I$. Под действием внутреннего автоморфизма получим новую кривую $X'(t) = AX(t)A^{-1}$, также выходящую из единицы. Дифференцируя по t и полагая затем $t = 0$, получим преобразования внутреннего автоморфизма в алгебре $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$: $Ad(A)V = AVA^{-1}$, образующие присоединенную группу $Ad(GL(n, \mathbb{K}))$. Ясно, что она тоже изоморфна $SL(n, \mathbb{K})$.

Рассмотрим теперь I-параметрическую группу внутренних автоморфизмов $Ad_t(A)V = A(t)V A^{-1}(t)$. Дифференцируя по t , получим

$$\frac{d}{dt} Ad_t(A)V = \frac{dA}{dt} V A^{-1}(t) - A(t)V A^{-1}(t) \frac{dA}{dt} A^{-1}(t).$$

Полагая здесь $t = 0$ и $\left. \frac{dA}{dt} \right|_0 = u$, найдем операторы присоединенной алгебры

$$ad(u)V = uV - Vu.$$

Инвариантные подпространства присоединенной группы, а следовательно, и операторов присоединенной алгебры — это идеалы алгебры. Как мы увидим далее, единственными нетривиальными идеалами алгебры

$gl(n, \mathbb{K})$ являются одномерное подпространство скалярных матриц, изоморфное $\mathbb{K}$ и $(n^2 - 1)$ -мерное подпространство $sl(n, \mathbb{K})$ матриц с нулевым следом, причем они взаимно просты. Таким образом, $gl(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K} \oplus sl(n, \mathbb{K})$, а присоединенное представление вполне приводимо.

Пример 2. Пусть g - трехмерная алгебра Ли со структурными уравнениями $[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = e_1$. Найдем присоединенную алгебру $ad(g)$. Ее операторы действуют на базис следующим образом: $ad(u)e_1 = 0, ad(u)e_2 = -u^3 e_1, ad(u)e_3 = u^2 e_3$. Следовательно, их матрицы имеют вид

$$ad(u) = \begin{bmatrix} 0 & -u^3 & u^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Это двумерная коммутативная алгебра Ли. Вычислим ее экспоненту. Так как матрицы нильпотентны ($ad(u)^2 = 0$), то $Exp(tad(u)) = I + tad(u)$. При $t=1$ будем иметь

$$Ad(a) = \begin{bmatrix} 1 & -a^3 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(мы используем канонические координаты I-го рода). Отсюда следует, что локально присоединенная группа $Ad(G)$ - это двумерная коммутативная группа Ли с групповыми функциями $f^1 = -(a^3 + b^3), f^2 = a^2 + b^2$.

9.1. Доказать, что $Int(G)$ является нормальным делителем в группе $Aut(G)$ всех автоморфизмов группы Ли.

9.2. Доказать, что центр группы Ли $Z \subset Ker(Ad)$. Если G связна, то $Z = Ker(Ad)$.

9.3. Алгебра Ли имеет структурные уравнения $[e_i, e_j] = e_k, i, j, k = 1, \dots, n$. Найти группу ее внутренних автоморфизмов.

9.4. Найти группу автоморфизмов ортогональной группы $O(n, \mathbb{R})$.

9.5. Найти присоединенное представление группы $SU(2)$ матриц $A = \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}, a\bar{a} + b\bar{b} = 1$.

9.6. Найти присоединенную группу $Ad(G)$ группы 3-матриц вида

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a^1 & a^3 \\ 0 & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a^i \in \mathbb{R}.$$

9.7. Комитантом присоединенной группы $Ad(G)$ называется тензор

$$C_{j_1 \dots j_q k}^{i_1 \dots i_p}, \quad \text{полученный из структурного тензора } C_{jk}^i$$

с помощью тензорных операций. Доказать, что комитант инвариантен при преобразованиях присоединенной группы.

9.8. Пусть C – комитант присоединенной группы (см. зада-

чу 9.7). Доказать, что решения системы уравнений $C_{j_1 \dots j_q k}^{i_1 \dots i_p} u^k = 0$

образуют идеал алгебры $\mathfrak{g}$. Привести примеры.

9.9. Выразить компоненты оператора $ad(u)$ в заданном базисе алгебры Ли.

9.10. Найти присоединенные алгебры $ad(\mathfrak{g})$ двумерных алгебр Ли.

9.11. Найти операторы присоединенного представления алгебры

Ли $t_0(3, \mathbb{R})$ матриц $u = \begin{bmatrix} 0 & u^1 & u^3 \\ 0 & 0 & u^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

9.12. Найти присоединенные представления алгебры $SU(2)$. Записать его операторы в базисе задачи 3.16. Показать, что оно точное и определяет изоморфизм этой алгебры на алгебру $SO(3, \mathbb{R})$ кососимметричных 3-матриц.

9.13. Найти присоединенное представление алгебры $sl(2, \mathbb{R})$. Записать его операторы в базисе задачи II.12. Показать, что оно точное и определяет изоморфизм этой алгебры на алгебру $SO(1, 2)$.

9.14. Найти присоединенное представление трехмерной алгебры с векторным произведением (§ 3, пример 2).

9.15. Найти компоненты присоединенных операторов $ad(u)$ для алгебры $gl(n, \mathbb{K})$, относительно базиса $\{E_\alpha^\beta\}$.

9.16. Найти компоненты присоединенных операторов $ad(u)$ для алгебры Ли $SO(n)$ в базисе $E_\alpha^\beta = E_\alpha^\beta - E_\beta^\alpha$, $\alpha < \beta$.

9.17. Найти компоненты присоединенных операторов алгебры $sl(n, \mathbb{K})$, используя базис

$$E_{\alpha}^{\beta} = \begin{cases} E_{\alpha}^{\beta}, & \text{если } \alpha \neq \beta; \\ E_{\alpha}^{\beta} - E_n^n, & \text{если } \alpha = \beta, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta = 1, \dots, n$, $(\alpha, \beta) \neq (n, n)$.

9.18. Доказать, что операторы присоединенной алгебры Ли являются дифференцированиями (см. задачу 3.29).

9.19. Доказать, что присоединенная алгебра $ad(g)$ является идеалом в алгебре $D(g)$ всех дифференцирований алгебры Ли g .

9.20. Показать, что для $a \in G, u \in g$ $Ad(a)u = R_{*a}^{-1} u$.

9.21. Доказать, что $ad(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Ad(\exp tu) - I)$.

9.22. Доказать, что $[u, v] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Ad(\exp tu)v - v)$.

9.23. Доказать, что $Ad(\exp v) = \exp(ad(v))$.

9.24. Доказать, что: 1) $\exp(t Ad(a)v) = a \exp(tv) a^{-1}$;
2) $\exp(u)v \exp(-u) = \exp(ad(u))v$, $u, v \in gl(n, \mathbb{C})$.

9.25. Доказать, что всякий правый сдвиг преобразует левоинвариантное поле на группе Ли в левоинвариантное по закону

$$R_{*a}(u) = Ad(a^{-1})u.$$

§ 10. Накрывающая группа

Напомним, что непрерывное отображение связного и локально линейно связного топологического пространства $\tilde{G}$ на топологическое пространство G (база) называется накрытием, если каждая точка $a \in G$ имеет окрестность U , прообраз которой $\omega^{-1}(U)$ распадается в несвязное объединение открытых множеств из $\tilde{G}$, каждое из которых с помощью ω гомеоморфно отображается на U . Пусть G — связная группа Ли. Тогда она обладает односвязным накрывающим пространством $\tilde{G}$ (универсальная накрывающая). При этом в $\tilde{G}$ можно определить умножение таким образом, что $\tilde{G}$ станет группой Ли, а накрывающее отображение $\omega: \tilde{G} \rightarrow G$ (проекция) — гомоморфизмом групп Ли.

Пусть $\tilde{e} \in \omega^{-1}(e)$. Принимаем его за единицу в $\tilde{G}$. Пусть далее $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{G}$ и $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ — гладкие пути, проведенные к

этим точкам из единицы. Положим $a = \omega(\tilde{a})$, $b = \omega(\tilde{b})$ и пусть $\tilde{a} = \omega \tilde{a}$, $\tilde{b} = \omega \tilde{b}$ — проекции путей на базу. Рассмотрим путь $\gamma = \tilde{a} \cdot (a \tilde{b})$ и накрывающий его путь $\tilde{\gamma}$ с началом в $\tilde{e}$. Его конец $\tilde{c}$ не зависит от выбора $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, а лишь от $\tilde{a}$, $\tilde{b}$. Оказывается, что, положив $\tilde{c} = \tilde{a} \tilde{b}$, мы превратим $\tilde{G}$ в группу Ли. Кроме того, $\omega(\tilde{a} \tilde{b}) = \omega(\tilde{a}) \omega(\tilde{b})$. Значит, ω — гомоморфизм.

Группа $\tilde{G}$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Более того, локально изоморфные группы Ли имеют одну и ту же накрывающую группу.

Обозначим через $\tilde{N}(\tilde{G}) = \omega^{-1}(e)$ — ядро проекции. Это дискретный нормальный делитель, лежащий в центре накрывающей группы. Группа $\tilde{N}(\tilde{G})$, таким образом, коммутативна и называется фундаментальной группой (или группой Пуанкаре). Ее элементы соответствуют замкнутым путям $\tilde{e} \in \tilde{G}$, рассматриваемым с точностью до гомотопии. Тогда $\tilde{G} \cong \tilde{G} / \tilde{N}(\tilde{G})$.

Обратно, пусть $\tilde{G}$ — односвязная группа Ли и N — любой ее дискретный (и, следовательно, центральный) нормальный делитель. Тогда $\tilde{G}$ является универсальной накрывающей группой для $\tilde{G}/N$, а естественная проекция $\omega: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}/N$ — накрытием. Число элементов в N называется кратностью (или числом листов) накрытия. Оно может быть и бесконечным.

При решении задач полезно знать также следующее свойство: пусть $\tilde{G}$ — связная группа Ли и $H \subset \tilde{G}$ — ее связная подгруппа Ли. Тогда если факторпространство $\tilde{G}/H$ односвязно, то фундаментальная группа $\tilde{N}(\tilde{G})$ изоморфна некоторой факторгруппе группы $\tilde{N}(H)$.

Пример 1. Гомоморфизм $\omega: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ на группу комплексных чисел единичного модуля, определенный формулой $Z = e^{2\pi i x}$, имеет дискретное ядро $\mathbb{Z}$. Так как $\mathbb{R}$ односвязно, то это универсальное накрытие со счетной кратностью. Здесь $\mathbb{Z}$ — фундаментальная группа окружности S^1 . Многомерное обобщение — накрытие $\mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ тора.

Пример 2. Рассмотрим группу движений евклидовой плоскости $x^1 = x \cos a^3 - x^2 \sin a^3 + a^1$, $x^2 = x \sin a^3 + x^2 \cos a^3 + a^2$. Каждое движение определяется точкой $a(a^1, a^2, a^3)$ группового трехмерного пространства. При этом $-\infty < a^1 < \infty$, $-\infty < a^2 < \infty$. Что касается параметра a^3 , то заданное движение определяет его значение не однозначно, а с точностью до периода 2π . Поэтому групповое многообразие $\tilde{G}$ есть часть $\mathbb{R}^3$, ограниченная плос-

костями $\alpha^3 = 0$, $\alpha^3 = 2\tilde{\mathcal{K}}$, причем эти плоскости отождествлены. Положив $-\infty < \alpha^3 < \infty$, мы получим односвязную накрывающую — коммутативную группу $\mathbb{R}^3$. Здесь $\tilde{\mathcal{K}}(G) = \mathbb{Z}$.

Пример 3. Вернемся к линейному представлению $\omega : S^3 \rightarrow SO(3)$, рассмотренному в § 8, пример 3. Здесь группа кватернионов единичного модуля представляется группой вращений в $\mathbb{R}^3$. Мы видели, что ядро этого представления дискретно: $\text{Ker } \omega = \mathbb{Z}_2$. Так как группа S^3 односвязна (как 3-сфера), то мы имеем дело с двулистным универсальным накрытием группы $SO(3)$. В частности, группа $SO(3)$ не односвязна.

10.1. Доказать, что если ядро гомоморфизма $\varphi : G \rightarrow G'$ связных групп дискретно и $\dim G = \dim G'$, то φ является групповым накрытием.

10.2. Пусть G и H — связные группы Ли и $\varphi : G \rightarrow H$ — гомоморфизм. Доказать, что φ является накрытием лишь тогда, когда $\varphi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ — изоморфизм.

10.3. Пусть G — топологическая группа и $\mathcal{N}$ — ее дискретный нормальный делитель. Доказать, что факторгруппа $G/\mathcal{N}$ локально изоморфна G , а естественное отображение $G \rightarrow G/\mathcal{N}$ — накрытие.

10.4. Пусть $H \subset G$ — замкнутая подгруппа связной группы Ли и H_e — ее компонента единицы. Доказать, что естественное отображение $p : G/H_e \rightarrow G/H$ является накрытием.

10.5. Пусть G — линейно связная топологическая группа. Доказать, что фундаментальные группы ее различных элементов изоморфны.

Примечание: Таким образом, для линейно связных групп достаточно рассматривать лишь фундаментальную группу $\tilde{\mathcal{K}}(G) = \tilde{\mathcal{K}}(G, e)$.

10.6. Доказать, что фундаментальная группа связной группы Ли коммутативна.

10.7. Доказать, что гомоморфизм связных групп порождает гомоморфное отображение их фундаментальных групп.

10.8. Пусть G_i ($i = 1, \dots, \kappa$) — линейно связные топологические группы. Тогда топологическая группа $G = G_1 \times \dots \times G_\kappa$ линейно связна, а ее фундаментальная группа $\tilde{\mathcal{K}}(G)$ изоморфна прямому произведению $\tilde{\mathcal{K}}(G_1) \times \dots \times \tilde{\mathcal{K}}(G_\kappa)$. Доказать.

10.9. Доказать, что прямое произведение топологических групп односвязно лишь тогда, когда односвязны сомножители.

10.10. Показать, что группа $SO(2, \mathbb{R})$ связна, но не односвязна.

10.11. Найти универсальную накрывающую и вычислить фундаментальную группу n -мерного тора T^n .

10.12. Односвязны ли следующие группы?

1) $\mathbb{R}^n$; 2) $\mathbb{C}^n$; 3) $\mathbb{R}_o$; 4) $\mathbb{C}_o$.

10.13. Показать, что группа $SU(2)$ локально изоморфна группе $SO(3, \mathbb{R})$ и дважды накрывает ее.

10.14. Пусть группа Ли $SO(3, \mathbb{R})$ параметризована углами Эйлера (см. задачу 2.27). Используя накрытие $SU(2) \rightarrow SO(3)$, найти соответствующую параметризацию группы $SU(2)$.

10.15. Показать, что группы $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ связны и односвязны.

10.16. Вычислить фундаментальную группу группы $SO(3, \mathbb{R})$.

10.17. Доказать, что связная компонента единицы группы $SO(3, 1)$ гомоморфна группе $SL(2, \mathbb{C})$ и дважды накрывается ею. Дать геометрическую интерпретацию результата.

10.18. Доказать, что группа $SL(2, \mathbb{R})$ локально изоморфна группе $SO_e(2, 1)$ и дважды накрывает ее.

10.19. Доказать, что связная компонента единицы группы $SO_e(2, 1)$ изоморфна факторгруппе $SU(1, 1) / \mathbb{Z}_2$. Найти накрывающее отображение $\varphi : SU(1, 1) \rightarrow SO_e(2, 1)$.

10.20. Доказать, что группа $O(4)$ вращений в E^4 обладает универсальным двулистным накрытием $S^3 \times S^3 \rightarrow O(4, \mathbb{R})$.

10.21. Показать, что группа $SL(2, \mathbb{C})$ локально изоморфна $SO(3, \mathbb{C})$ и дважды накрывает ее.

10.22. Показать, что отображение $\varphi : SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(4, \mathbb{C})$, определенное формулой $\varphi(A, B)X = AXB^{-1}$, является 2-листным накрытием.

10.23. Показать, что следующие группы Ли односвязны: $SL(n, \mathbb{C})$; $SU(n)$; $Sp(m, \mathbb{C})$; $T_o(n, \mathbb{K})$.

10.24. Доказать, что 1) $U(n)$ гомеоморфна $U(1) \times SU(n)$; 2) $O(n)$ гомеоморфна $\mathbb{Z}_2 \times SO(n)$.

10.25. Найти фундаментальную группу унитарной группы $U(n)$.

Найти фундаментальную группу группы $SO(n, \mathbb{R})$ при $n \geq 3$.

10.26. Доказать, что группа автоморфизмов $Aut(G)$ связной группы Ли изоморфна группе автоморфизмов $Aut(\mathfrak{g})$ ее алгебры Ли.

10.27. Всякая 2 -мерная связная коммутативная группа Ли G есть прямое произведение $T^k \times \mathbb{R}^m$, ($k+m=2$) k -мерного тора и m -мерной векторной группы. Доказать.

10.28. Показать, что всякая компактная коммутативная связная группа Ли изоморфна тору T^n .

10.29. Показать, что группа $GL(n, \mathbb{C})$ связна, но неодно-
связна.

§ II. Инвариантные формы. Форма Киллинга

Заданная на группе Ли полилинейная форма Φ , в частности внешняя q -форма, называется левоинвариантной, если $L_a^* \Phi = \Phi$ для любых $a \in G$. Всякую такую форму можно получить левыми сдвигами, задав ее значение в единице группы:

$$\Phi(v_1, \dots, v_q)_a = \Phi(L_{*a}^{-1} v_1, \dots, L_{*a}^{-1} v_q)_e. \quad (1)$$

Аналогично определяются правоинвариантные формы.

Особый интерес представляют формы, которые инвариантны относительно как левых, так и правых сдвигов. Такие формы называются инвариантными (или биинвариантными). Они, следовательно, инвариантны относительно преобразований присоединенной группы.

Для билинейных форм условие инвариантности имеет вид

$$\Phi(Ad(a)u, Ad(a)v) = \Phi(u, v) \quad (2)$$

и равносильно условию

$$\Phi([w, u], v) + \Phi([u, [w, v]]) = 0. \quad (3)$$

В частности, если группа Ли допускает симметричную положительно (или отрицательно) определенную инвариантную билинейную форму, то ее алгебра Ли превращается в евклидово пространство со скалярным произведением $(u, v) = \Phi(u, v)$. Такие алгебры Ли называются компактными. Они соответствуют компактным группам Ли.

Важным примером инвариантной симметричной билинейной формы является форма Киллинга

$$B(u, v) = \text{tr}(ad(u) \circ ad(v)).$$

Полагая $B(u, v) = g_{ij} u^i v^j$ и учитывая, что операторы присоединенной алгебры имеют компоненты $(ad(u))_j^i = C_{kj}^i u^k$,

получим $g_{ij} = c_{is}^{\kappa} c_{j\kappa}^s$. Заметим, что форма Киллинга может оказаться и вырожденной. Если же она невырожденная, то на группе Ли определяется псевдориманова метрика, называемая метрикой Киллинга.

Пример I. Найдем форму Киллинга группы $GL(n, \mathbb{R})$. В алгебре Ли этой группы выберем базис, состоящий из матричных единиц E_{β}^{α} . Тогда (см. задачу 9.15)

$$ad(u) E_{\beta}^{\alpha} = (\delta_{\delta}^{\alpha} u_{\beta}^{\delta} - \delta_{\beta}^{\delta} u_{\delta}^{\alpha}) E_{\tau}^{\delta},$$

откуда

$$ad(u) \cdot ad(v) E_{\beta}^{\alpha} = (\delta_{\delta}^{\alpha} u_{\gamma}^{\delta} v_{\beta}^{\gamma} + \delta_{\beta}^{\delta} v_{\gamma}^{\alpha} u_{\delta}^{\gamma} - u_{\delta}^{\alpha} v_{\beta}^{\delta} - v_{\delta}^{\alpha} u_{\beta}^{\delta}) E_{\tau}^{\delta}.$$

Подсчитывая след этого оператора, получим

$$B(u, v) = 2ntz(uv) - 2tz u \cdot tz v.$$

Эта билинейная форма является вырожденной. В самом деле, положив $v = \lambda I$ и учитывая, что $tz(\lambda I) = n\lambda$, $tz(\lambda u) = \lambda tz u$, получим $B(u, \lambda I) = 0$ при любом $u \in gl(n, \mathbb{R})$.

Пример 2. Присоединенное представление трехмерной алгебры Ли $SO(3)$ с векторным произведением (задача 9.14) имеет своими операторами

$$ad(u) = \begin{bmatrix} 0 & -u^3 & u^2 \\ u^3 & 0 & -u^1 \\ -u^2 & u^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$ad(u) \circ ad(v) = \begin{bmatrix} -(u^2 v^2 + u^3 v^3) & u^2 v^1 & u^3 v^1 \\ u^1 v^2 & -(u^1 v^1 + u^3 v^3) & u^3 v^2 \\ u^1 v^3 & u^2 v^3 & -(u^1 v^1 + u^2 v^2) \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$B(u, v) = -2(u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3).$$

Алгебра Ли $SO(3)$, таким образом, компактна.

II.1. Пусть $\Phi_{ij} = \Phi(\partial_i, \partial_j)_e$ – компоненты билинейной формы $\Phi(u, v)$ в единице группы Ли относительно натурального репера. Найти компоненты соответствующей левоинвариантной формы на G .

II.2. Найти канонические виды невырожденных квадратичных форм $\Phi(x, x)$ на двумерной некоммутативной алгебре Ли относительно группы ее внутренних автоморфизмов.

II.3. Используя результат предыдущей задачи, найти канонические виды левоинвариантных метрик на группе Ли аффинных преобразований прямой: $x' = a + bx$, $b > 0$.

II.4. Пусть $\mathfrak{g}$ – шестимерная алгебра Ли со структурными уравнениями $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_3] = e_5$, $[e_2, e_3] = e_6$ (остальные коммутаторы равны нулю). Пусть $\Phi(u, v)$ – симметричная билинейная форма на $\mathfrak{g}$ с существенными компонентами $a_{34} = a_{16} = 1$, $a_{25} = -1$. Показать, что $\Phi(u, v)$ инвариантна.

II.5. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли. Показать, что полилинейная форма $\Phi(v_1, \dots, v_k) = \text{tr} [ad(v_1) \circ \dots \circ ad(v_k)]$ инвариантна.

II.6. Показать, что форма Киллинга инвариантна относительно группы автоморфизмов алгебры Ли.

II.7. Доказать, что операторы присоединенного представления $ad(u)$ кососимметричны относительно формы Киллинга:

$$B(ad(w)u, v) + B(u, ad(w)v) = 0.$$

II.8. Вычислить метрику Киллинга группы $SU(2)$.

II.9. Найти метрику Киллинга группы $O(2, 1)$.

II.10. Найти форму Киллинга группы $SL(2, \mathbb{R})$.

II.11. Показать, что матрицы

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

образуют ортонормированный базис в алгебре $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ относительно метрики Киллинга.

II.12. Найти форму Киллинга алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

II.13. Найти форму Киллинга алгебры $SO(n, \mathbb{R})$ кососимметричных матриц.

II.14. Найти форму Киллинга алгебры $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$.

II.15. Проверив, что $\mathfrak{h} \subset SO(\kappa + m, \mathbb{R})$, состоящая из матриц $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, $A \in SO(\kappa, \mathbb{R})$, $B \in SO(m, \mathbb{R})$ есть подалгебра Ли, найти ортогональное дополнение $\mathfrak{h}^\perp$ относительно метрики Киллинга.

II.16. Пусть $\mathfrak{h}$ — идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Доказать, что его ортогональное дополнение $\mathfrak{h}^\perp$ относительно метрики Киллинга есть также идеал в $\mathfrak{g}$.

II.17. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая комплексная алгебра Ли. Доказать, что любая билинейная инвариантная форма $\Phi(u, v)$ на $\mathfrak{g}$ пропорциональна форме Киллинга $\Phi(u, v) = \lambda B(u, v)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

II.18. Пусть G — группа Ли с инвариантной римановой метрикой. Доказать, что любая геодезическая, проходящая через единицу группы, является однопараметрической подгруппой. Верно и обратное.

II.19. Пусть G — группа Ли с инвариантной римановой метрикой. Доказать, что всякая геодезическая на G получается левым сдвигом из некоторой однопараметрической подгруппы.

II.20. Доказать, что группа Ли G обладает инвариантной римановой метрикой тогда и только тогда, когда замыкание ее присоединенного представления $H = \text{Ad}(G)$ компактно в $GL(\mathfrak{g})$.

II.21. Доказать, что всякая подалгебра компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ компактна, прямая сумма компактных алгебр Ли компактна.

II.22. Показать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является компактной лишь тогда, когда тензор $C_{ijk} = g_{is} C_{jk}^s$ кососимметричен по всем трем индексам.

II.23. Показать, что всякая компактная группа Ли обладает инвариантной римановой метрикой.

II.24. Доказать, что всякий элемент компактной связной группы Ли может быть соединен однопараметрической подгруппой с единицей.

II.25. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и φ — ее линейное представление на V . Доказать, что симметричная билинейная форма на $\mathfrak{g}$: $\Phi(u, v) = \text{tr}(\varphi(u)\varphi(v))$ является инвариантной.

II.26. Доказать, что траектории левоинвариантного векторного поля на группе Ли есть геодезические линии связности $\Gamma_{ij}^k = L_s^k \partial_j V_i^s$.

II.27. Найти компоненты групповой связности на группе Ли с умножением $C^1 = x^1 + y^1 e^{-x^2}$, $C^2 = x^2 + y^2$.

II.28. Вычислить компоненты групповой связности аддитивной группы $\mathbb{R}^n$. Найти уравнения геодезических с началом в единице группы.

II.29. Вычислить компоненты групповой связности на группе S_0 . Найти уравнения геодезических с началом в единице группы.

II.30. Найти инвариантную метрику на группе S_0 с начальным значением $g_{ij}(e) = \delta_{ij}$. Показать, что связность предыдущей задачи есть риманова связность этой метрики.

§ 12. Некоторые типы алгебр Ли

Пусть g — вещественная алгебра Ли. Тогда $g^{(2)} = [g, g] \subset g$ есть идеал, который называется первой производной алгеброй. Определим по индукции k -ю производную алгебру, положив $g^{(k)} = [g^{(k-1)}, g^{(k-1)}]$. Таким образом, получится последовательность вложенных идеалов:

$$g = g^{(1)} \supset g^{(2)} \supset g^{(3)} \supset \dots,$$

называемая производным рядом алгебры g . Может оказаться, что этот ряд на некотором шаге $k \leq \dim g$ завершится нулевым элементом: $g^{(k)} = 0$. В таком случае алгебру Ли называют разрешимой. Всякая подалгебра и всякий гомоморфный образ разрешимой алгебры Ли также разрешим. Более того, если g содержит разрешимый идеал h такой, что g/h разрешима, то g также разрешима. Заметим также, что всякая разрешимая алгебра Ли содержит коммутативный идеал. Если $g^{(k)} = 0$, но $g^{(k-1)} \neq 0$, то им является $g^{(k-1)}$.

Важный частный класс разрешимых алгебр образуют нильпотентные алгебры Ли. Рассмотрим следующую последовательность идеалов

$$g_{(1)} = g, \quad g_{(2)} = [g, g], \dots, g_{(k)} = [g_{(k-1)}, g].$$

Ясно, что $g_{(1)} \supset g_{(2)} \supset g_{(3)} \supset \dots$. Она называется убывающим центральный рядом алгебры g . Алгебра g называется нильпотентной, если $g_{(k)} = 0$ для некоторого k . Ясно, что $g^{(k)} \subset g_{(k)}$. Поэтому всякая нильпотентная алгебра разрешима. Всякая нильпотентная алгебра Ли обладает нетривиальным центром: если $g_{(k)} = 0$ и $g_{(k-1)} \neq 0$, то $[g_{(k-1)}, g] = 0$ и, значит, $g_{(k-1)}$ — центр алгебры. Полезен также следующий признак: алгебра Ли нильпотентна тогда и только тогда, когда для любого $u \in g$ присоединенные операторы $ad(u)$ нильпотентны (теорема Энгеля).

Алгебра Ли называется полупростой, если она не содержит (ненулевых) разрешимых идеалов. В частности, алгебра Ли размерности $n > 1$ называется простой, если она не содержит нетривиальных идеалов. Другими словами, ее присоединенное представление $ad(g)$ неприводимо. Ясно, что всякая простая алгебра полупроста. Можно доказать, что алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда она разлагается в прямую сумму простых идеалов: $g = g_1 \oplus \dots \oplus g_s$. Это разложение единственно. При этом всякий идеал алгебры g есть прямая сумма некоторых g_i .

В некотором смысле изучение произвольной алгебры Ли сводится к изучению разрешимой и полупростой. Оказывается, во всякой алгебре Ли существует максимальный (по включению) разрешимый идеал $\mathcal{Z}$. Он называется радикалом алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathcal{Z}$ полупроста. Более полное описание строения произвольной алгебры Ли дает теорема Леви-Мальцева: существует полупростая алгебра $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ такая, что $\mathfrak{g} = \mathcal{Z} \oplus \mathfrak{h}$ — полупрямая сумма (разложение Леви).

Более широкий класс, чем полупростые, образуют редуктивные алгебры Ли. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется редуктивной, если ее присоединенное представление вполне приводимо. Отсюда следует, поскольку $\text{ad}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}/\mathcal{Z}$, что всякая редуктивная алгебра Ли является суммой своего центра и полупростой алгебры. Более точно, $\mathfrak{g} = \mathcal{Z} \oplus \mathfrak{g}^{(2)}$. Редуктивная алгебра полупроста лишь тогда, когда ее центр нулевой.

Для практического использования удобны следующие признаки указанных выше типов алгебр Ли, сформулированные с помощью формы Киллинга $B(u, v)$:

- 1) Алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга невырождена.
- 2) Алгебра Ли разрешима тогда и только тогда, когда $B([u, v], w) = 0$ для любых $u, v, w \in \mathfrak{g}$. Это значит, что $\mathfrak{g}^{(2)} \perp \mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга.
- 3) В частности, алгебра Ли нильпотентна тогда и только тогда, когда $B \equiv 0$.

Пример 1. Рассматривая алгебру $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ (§II, пример I), мы видим, что ее форма Киллинга вырождена, а центр принадлежит ее нулевой области. В то же время ограничение формы Киллинга на идеале $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ ($\text{tr } u = 0$) дает $B(u, v) = 2n \text{tr}(uv)$. Легко видеть, что форма невырождена и, таким образом, идеал $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ является полупростым. В итоге имеем разложение в прямую сумму $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{Z} \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Это значит, что алгебра $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ редуктивна.

Пример 2. Рассмотрим группу движений евклидовой плоскости. Ее алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2 \oplus \mathfrak{so}(2)$ (полупрямая сумма), можно реализовать как матричную алгебру Ли

$$u = \begin{bmatrix} 0 & -u^3 & u^1 \\ u^3 & 0 & u^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 83 -

со структурными уравнениями

$$[e_1, e_2] = 0; [e_1, e_3] = -e_2; [e_2, e_3] = e_1.$$

Мы видим, что $g^{(2)} = \{e_1, e_2\}$, $g^{(3)} = 0$. Алгебра, следовательно, разрешима.

Пример 3. Пусть $t_\alpha(n, \mathbb{R})$ — алгебра Ли строго верхних треугольных матриц ($u_\beta^\alpha = 0$, если $\alpha \geq \beta$). Так как эти матрицы нильпотентны ($u^n = 0$), то нильпотентность алгебры вытекает из теоремы Энгеля.

I2.1. Показать, что всякая нильпотентная алгебра Ли размерности $n = 2$ коммутативна.

I2.2. Показать, что всякая двумерная некоммутативная алгебра Ли разрешима, но не нильпотентна.

I2.3. Показать, что следующие структурные уравнения определяют нильпотентные алгебры Ли:

1) $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = 0$;

2) $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = 0$;

$$[e_2, e_3] = 0, [e_2, e_4] = 0, [e_3, e_4] = 0.$$

I2.4. Показать, что всякая трехмерная нильпотентная некоммутативная алгебра Ли имеет структурные уравнения

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = 0.$$

I2.5. Показать, что группа Ли G , определенная законом умножения $(a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 + a_1 b_1)$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, нильпотентна.

I2.6. Перечислить все нильпотентные алгебры Ли размерности $n = 3$.

I2.7. Доказать, что центр нильпотентной алгебры Ли отличен от нуля.

I2.8. Доказать, что алгебра Ли g нильпотентна, если ее факторалгебра g/h по некоторому идеалу h , содержащемуся в центре, нильпотентна.

I2.9. Доказать, что производная разрешимой группы Ли нильпотентна.

I2.10. Пусть $h \subset g\ell(V)$ — подалгебра Ли и элемент $u \in h$ нильпотентен: $u^n = 0$. Тогда $ad(u) \in g\ell(h)$ также нильпотентен. Доказать.

12.11. Доказать, что производная алгебра $g^{(2)}$ ортогональна радикалу алгебры g относительно формы Киллинга: $B(g^{(2)}, z) = 0$.

12.12. Найти производную алгебру алгебры $gl(n)$.

12.13. Найти производную алгебру алгебры Ли $t(n, \mathbb{R})$.

12.14. Доказать, что группа $T(n, \mathbb{R})$ верхних треугольных матриц разрешима.

12.15. Показать, что следующие группы Ли являются разрешимыми: 1) $\mathbb{R}^2 \times SO(2)$; 2) $\mathbb{R}^3$; 3) $\mathbb{R}^2 \times SO_e(1, 1)$.

12.16. Трехмерная алгебра Ли имеет структурные уравнения $[e_1, e_2] = 0$, $[e_2, e_3] = a e_1 + b e_2$, $[e_3, e_1] = c e_1 + d e_2$, где $ad - bc \neq 0$. Показать, что она разрешима.

12.17. Группа Ли имеет структурные уравнения $d\theta^1 = -\theta^1 \wedge \theta^3$, $d\theta^2 = -\theta^2 \wedge \theta^3$, $d\theta^3 = 0$.

Показать, что она разрешима.

12.18. Показать, что трехмерные алгебры Ли типа I - VII разрешимы, типа VIII - IX неразрешимы (см. § 3).

12.19. Показать, что 5-мерная алгебра Ли со структурными уравнениями $[e_1, e_2] = e_5$, $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_2, e_4] = e_4$ (остальные $[e_i, e_j] = 0$) разрешима.

12.20. Разрешима ли группа $SL(n, \mathbb{R})$ $^{(k-1)}$ / $^{(k)}$?

12.21. Доказать, что каждая факторалгебра $g^{(k-1)} / g^{(k)}$ коммутативна.

12.22. Пусть h - такой идеал в $g^{(k-1)}$, что факторалгебра $g^{(k-1)} / h$ коммутативна. Доказать, что $g^{(k)} \subset h$.

12.23. Доказать, что всякая подалгебра $h \subset g$ разрешимой (нильпотентной) алгебры Ли разрешима (нильпотентна).

12.24. Доказать, что гомоморфный образ, в частности, факторалгебра разрешимой (нильпотентной) алгебры Ли есть разрешимая (нильпотентная) алгебра.

12.25. Алгебра g разрешима, если она содержит такой разрешимый идеал h , что факторалгебра g/h разрешима. Доказать.

12.26. Доказать, что всякая компактная разрешимая алгебра Ли коммутативна.

12.27. Пусть g - трехмерная алгебра Ли с векторным произведением. Показать, что она проста и найти группу всех ее автоморфизмов.

12.28. Показать, что группа вращений в E^3 проста.

12.29. Если алгебра Ли проста, то $C_{\kappa j}^{\kappa} = 0$. Доказать.

12.30. Показать, что алгебра Ли со структурными уравнениями $[e_1, e_2] = e_1$, $[e_1, e_3] = 2e_2$, $[e_2, e_3] = e_3$ проста.

12.31. Доказать, что псевдоортогональная группа $O(2, 2)$ проста.

12.32. Пусть $\mathfrak{g}$ — трехмерная алгебра Ли. Тогда коммутатор $W = [u, v]$ определяет коррелятивное соответствие, которое 2-плоскости $p = u \wedge v$ сопоставляет прямую с направляющим вектором W . Показать, что если алгебра $\mathfrak{g}$ не проста, то эта корреляция вырождена.

12.33. Показать, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ при $n > 1$ является простой.

12.34. Если группа Ли G проста, то Ad задает ее неприводимое линейное представление. Доказать.

12.35. Доказать, что всякое линейное представление простой группы Ли является либо точным, либо тривиальным.

12.36. Выразить условие полупростоты алгебры Ли в терминах структурных констант.

12.37. Доказать, что не существует полупростых алгебр Ли размерности $n < 3$, а всякая полупростая алгебра размерности $n = 3$ проста.

12.38. Доказать, что алгебра тогда и только тогда полупроста, когда в ней нет ненулевых коммутативных идеалов. В частности, центр полупростой алгебры равен нулю.

12.39. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли и h, m — ее идеалы. Доказать, что следующие условия эквивалентны:
а) $h \cap m = 0$; б) $[h, m] = 0$; в) $B(h, m) = 0$.

12.40. Пусть $\mathfrak{z}$ — радикал алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Доказать, что факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ полупроста.

12.41. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Показать, что всякий идеал $h \subset \mathfrak{g}$ и всякая факторалгебра $\mathfrak{g}/h$ полупроста.

12.42. Доказать, что полупростая алгебра Ли совпадает со своей производной алгеброй.

12.43. Показать, что группа $Sp(n, \mathbb{R})$ полупроста.

12.44. Являются ли полупростыми следующие алгебры Ли:
а) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ б) $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$?

12.45. Пусть G — линейная связная группа Ли. Доказать, что если она полупроста, то $G \subset SL(n, \mathbb{R})$.

12.46. Доказать, что всякое (конечномерное) представление полупростой алгебры Ли полупросто.

12.47. Если алгебра Ли полупроста, то всякое ее дифференцирование является внутренним. Доказать.

12.48. Пусть $\mathfrak{g}$ — компактная полупростая алгебра Ли. Доказать, что группа $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ компактна.

12.49. Пусть G — связная полупростая группа Ли и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Доказать, что присоединенная группа $\text{Ad}(G)$ есть компонента единицы в группе $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$.

12.50. Показать, что всякая полупростая группа Ли обладает инвариантной псевдоримановой метрикой.

12.51. Доказать, что центр всякой связной полупростой (в частности простой) линейной группы Ли G конечен.

12.52. Пусть G — полупростая группа Ли. Доказать, что ее центр дискретен.

12.53. Четырехмерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет следующие структурные явления $[e_1, e_2] = 3e_1$; $[e_1, e_3] = e_3$; $[e_2, e_3] = 3e_3$ (остальные коммутаторы равны нулю). Показать, что она разлагается в прямую сумму центра и полупростой алгебры.

12.54. Пусть $\mathfrak{g}^{(2)}$ — редуктивная алгебра Ли: $\mathfrak{g} = \mathbb{Z} \oplus \mathfrak{m}$. Показать, что $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^{(2)}$.

12.55. Доказать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда редуктивна, когда каждый ее коммутативный идеал принадлежит центру $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{g}^{(2)} = 0$.

12.56. Доказать, что редуктивная алгебра Ли тогда и только тогда разрешима, когда она коммутативна.

12.57. Доказать, что всякая компактная алгебра Ли редуктивна.

12.58. Всякая компактная алгебра Ли является прямой суммой центра и полупростого идеала. Доказать.

§ 13. Группы Ли преобразований

Пусть M — n -мерное гладкое многообразие. Говорят, что группа Ли G действует слева на M как группа преобразований, если задано гладкое отображение $f: G \times M \rightarrow M$, удовлетворяющее условиям:

1) для каждого $a \in G$ преобразование $x' = a \cdot x$ есть диффеоморфизм многообразия M ;

2) для любых $a, b \in G$ $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$.

Это значит, что мы имеем гомоморфизм φ группы G в группу

всех диффеоморфизмов многообразия M . Образ этого гомоморфизма $G = \varphi(G)$ называется группой Ли преобразований. Из общих свойств гомоморфизмов следует, что единице группы $e \in G$ соответствует тождественное преобразование: $e \cdot x = x$, а обратному элементу $a^{-1} \in G$ обратное преобразование $x = a^{-1} \cdot x'$. Ядро гомоморфизма $\text{Ker } \varphi = \{a \in G : a \cdot x = x\}$ называется также ядром неэффективности. Это нормальный делитель в G . Если $\text{Ker } \varphi = \{e\}$, то говорят, что группа G действует на M эффективно. Это условие в дальнейшем предполагается выполненным.

Пусть $x_0 \in M$ — фиксированная точка. Множество элементов $H(x_0) \subset G$, для которых $a \cdot x_0 = x_0$, образует замкнутую подгруппу в G , называемую стационарной подгруппой (или группой изотропии) точки x_0 .

Локально, ограничиваясь окрестностью единицы $U \subset G$ и координатной окрестностью $\mathcal{U} \subset M$, преобразования группы можно записать в виде

$$x'^\alpha = f^\alpha(a^1, \dots, a^z, x^1, \dots, x^n) \quad (I)$$

($\alpha = 1, \dots, n$). В этом случае говорят также о локальной группе Ли преобразований.

Дифференциал гомоморфизма φ_* есть гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в алгебру Ли $\mathcal{X}(\mathcal{U})$ группы локальных диффеоморфизмов, т.е. в бесконечномерную алгебру Ли всех гладких векторных полей на $\mathcal{U} \subset M$. Отметим, что в силу условия эффективности алгебра $\hat{\mathfrak{g}} = \varphi_*(\mathfrak{g})$ имеет ту же размерность z , то и $\mathfrak{g}$. Таким образом, каждому $u \in \mathfrak{g}$ соответствует векторное поле X на $\mathcal{U} \subset M$, причем $\varphi_*[u, v] = [X, Y]$. В координатах это соответствие определяется якобиевой матрицей гомоморфизма φ с элементами

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ i \end{matrix} \right\} (x) = \frac{\partial f^\alpha(a, x)}{\partial a^i} \Big|_{a=e} \quad (2)$$

и имеет вид $X^\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ i \end{matrix} \right\} (x) u^i$.

(3)

В частности, базисным векторам e_i алгебры $\mathfrak{g}$ отвечают векторные поля $X_i = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ i \end{matrix} \right\} (x) \partial_\alpha$, образующие базис алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$

группы преобразований. Они называются инфинитезимальными операторами (или просто операторами) этой группы. При этом структурным уравнениям алгебры $\mathfrak{g}$ соответствуют структурные уравнения алгебры $\mathfrak{g}$

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^{\kappa} X_{\kappa} \quad (4)$$

или в координатах

$$\xi_i^{\beta} \partial_{\beta} \xi_j^{\alpha} - \xi_j^{\beta} \partial_{\beta} \xi_i^{\alpha} = C_{ij}^{\kappa} \xi_{\kappa}^{\alpha}.$$

Если вектор $u \in \mathfrak{g}$ порождает преобразования стационарной подгруппы точки x_0 , то мы должны иметь $\text{Exp}(tu) \cdot x_0 = x_0$. Дифференцируя по t и полагая $t = 0$, получим

$$\xi_i^{\alpha}(x_0) u^i = 0, \quad (5)$$

Таким образом, если $\text{rank}(\xi_i^{\alpha}(x_0)) = q_0$, то $z - q_0$ независимых решений этой системы $u_1, \dots, u_{z-q_0}$ дают нам операторы стационарной подгруппы $Y_a = u_a^i X_i$. Последняя, таким образом, имеет размерность $z - q_0$, где $q_0 \leq \min(z, n)$.

Обычно группа G задана непосредственно своими преобразованиями (I). Исходная группа Ли G называется в этом случае параметрической группой. Операция умножения ab определяется в ней однозначно законом композиции преобразований.

Пример I. Пусть $G = GL(2, \mathbb{R})$, $\mathbb{P}^1$ — вещественная проективная прямая с однородными координатами $(x^1 : x^2)$. В области $U \subset \mathbb{P}^1$, в которой $x^2 \neq 0$, введем координату $x = \frac{x^1}{x^2}$ и рассмотрим соответствие

$$\varphi : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow x' = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Нетрудно поверить, что оно задает действие группы Ли $GL(2, \mathbb{R})$ на проективной прямой. Это действие не является эффективным. Из условия $\frac{ax+b}{cx+d} = x$ следует $cx^2 + (d-a)x - b = 0$, откуда, в силу произвольности x , получим $a=d$, $c=0$, $b=0$. Таким образом, ядро неэффективности состоит из скалярных матриц λI ,

образующих центр группы $GL(2, \mathbb{R})$, и, следовательно, группа проективных преобразований на $\mathbb{P}^1$ изоморфна $SL(2, \mathbb{R})$.

Пример 2. Группа движений евклидовой плоскости

$$x' = x \cos a^3 - y \sin a^3 + a^1, \quad y' = x \sin a^3 + y \cos a^3 + a^2$$

зависит от трех параметров a^1, a^2, a^3 . Найдем ее инфинитезимальные операторы. Имеем

$$\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial a^i} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \sin a^3 - y \cos a^3 \\ 0 & 1 & x \cos a^3 - y \sin a^3 \end{bmatrix}.$$

В единице группы $a = (0, 0, 0)$, $(\xi_i^\alpha(x, y)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$.

Следовательно, операторы имеют вид $X_1 = \partial_1$, $X_2 = \partial_2$, $X_3 = -y\partial_1 + x\partial_2$, где $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, и удовлетворяют структурным уравнениям $[X_1, X_2] = 0$, $[X_1, X_3] = X_2$, $[X_2, X_3] = -X_1$. Это трехмерная алгебра Ли типа $\mathcal{U}\mathcal{I}$ (см. §3).

Найдем параметрическую группу. Рассматривая движения, отвечающие параметрам $a = (a^1, a^2, a^3)$ и $b = (b^1, b^2, b^3)$, вычислим их композицию

$$x' = (x \cos a^3 - y \sin a^3 + a^1) \cos b^3 - (x \sin a^3 + y \cos a^3 + a^2) \sin b^3 + b^1,$$

$$y' = (x \cos a^3 - y \sin a^3 + a^1) \sin b^3 + (x \sin a^3 + y \cos a^3 + a^2) \cos b^3 + b^2.$$

Получим снова движение, отвечающее параметрам

$$c^1 = a^1 \cos b^3 - a^2 \sin b^3 + b^1, \quad c^2 = a^1 \sin b^3 + a^2 \cos b^3 + b^2, \quad c^3 = a^3 + b^3.$$

Эти формулы определяют закон умножения $c = ab$ в группе G .

Рассмотрим произвольную точку (x_0, y_0) на плоскости и найдем операторы ее стационарной подгруппы. Матрица

$$(\xi_i^\alpha(x_0, y_0)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 1 & x_0 \end{bmatrix}$$

имеет ранг $q_0 = 2$, независимо от выбора точки. Поэтому система

$$u^1 - y_0 u^3 = 0, \quad u^2 + x_0 u^3 = 0$$

имеет единственное, определяемое с точностью до общего множителя, решение $u = (y_0, -x_0, 1)$. Отсюда следует, что стационарная подгруппа имеет лишь один оператор

$$X = -(y - y_0) \partial_1 + (x - x_0) \partial_2.$$

Это оператор группы вращений с центром (x_0, y_0) .

Пример 3. Пусть в $\mathbb{R}^2$ заданы инфинитезимальные операторы

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = x \partial_1 + \lambda(x, y) \partial_2,$$

где $\lambda(x, y)$ — гладкая функция. Найдем ее таким образом, чтобы X_1, X_2 были операторами некоторой группы преобразований. Вычислим коммутатор: $[X_1, X_2] = \partial_1 + (\partial_1 \lambda) \partial_2$. Но в силу структурных уравнений правая часть должна быть линейной комбинацией с постоянными коэффициентами этих же операторов:

$$[X_1, X_2] = c_{12}^1 \partial_1 + c_{12}^2 (x \partial_1 + \lambda \partial_2).$$

Сравнивая, получаем систему дифференциальных уравнений для неизвестной функции λ :

$$c_{12}^1 + x c_{12}^2 = 1, \quad \partial_1 \lambda = \lambda c_{12}^2,$$

где структурные константы также неизвестны. Но так как первое соотношение должно выполняться тождественно при любых x , то $c_{12}^1 = 1$,

$c_{12}^2 = 0$. Что же касается тождеств Якоби, то в случае двумерной алгебры Ли они всегда удовлетворяются тождественно. Теперь дифференциальное уравнение дает $\partial_1 \lambda = 0$, т.е. $\lambda = \lambda(y)$. Возможны два случая:

1) $\lambda = 0$. Тогда $X_1 = \partial_1, X_2 = x \partial_1$; 2) $\lambda \neq 0$. Можно преобразовать координаты в $\mathbb{R}^2$ таким образом, чтобы $\lambda = 1$. Тогда имеем группу преобразований с операторами

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = x \partial_1 + \partial_2.$$

Пример 4. Применение инфинитезимальных операторов полезно также и при изучении линейных представлений. Рассмотрим, например, представление группы $SU(2)$ в пространстве V однородных многочленов $P(x, y)$ степени n от двух переменных:

$$(\psi(A)P)(x, y) = P(\alpha x + \delta y, \beta x + \gamma y),$$

где

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in SU(2), \quad \delta = \bar{\alpha}, \quad \beta + \bar{\gamma} = 0, \quad \det A = 1,$$

$$P(x, y) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} y + \dots + c_{n-1} x y^{n-1} + c_n y^n.$$

Многочлены $x^n, x^{n-1}y, \dots, y^n$ образуют базис пространства V . Покажем, что это представление неприводимо. (Более того, можно доказать, что такими представлениями исчерпываются все неприводимые представления указанной группы). Для этого найдем инфинитезимальные операторы представления. Они порождаются базисными элементами алгебры Ли $SU(2)$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(см. § 3). Найдем, прежде всего, соответствующие однопараметрические подгруппы в $SU(2)$:

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}, \quad A_3(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}.$$

При переходе к представлению им соответствуют однопараметрические подгруппы преобразований

$$(\varphi(A_1)P)(x, y) = P(x, tx + y),$$

$$(\varphi(A_2)P)(x, y) = P(e^t x, e^{-t} y),$$

$$(\varphi(A_3)P)(x, y) = P(x + ty, y).$$

Дифференцируя по t и полагая $t = 0$, получим инфинитезимальные операторы

$$X_1 = x \partial_2, \quad X_2 = x \partial_1 - y \partial_2, \quad X_3 = y \partial_1.$$

Они действуют на базисные многочлены пространства $P_\kappa = x^\kappa y^{n-\kappa}$ следующим образом:

$$X_1(P_\kappa) = (n - \kappa) x^{\kappa+1} y^{n-\kappa-1} = (n - \kappa) P_{\kappa+1},$$

$$X_2(P_\kappa) = (2\kappa - n) x^\kappa y^{n-\kappa} = (2\kappa - n) P_\kappa,$$

$$X_3(P_\kappa) = \kappa x^{\kappa-1} y^{n-\kappa+1} = \kappa P_{\kappa-1}.$$

Теперь нетрудно видеть, что полученное представление действительно неприводимо, поскольку действием этих операторов можно каждый базисный многочлен перевести в любой другой.

13.1. Показать, что группа переносов $x' = x + a$ аффинного пространства изоморфна n -мерной векторной группе $\mathbb{R}^n$. Найти ее операторы.

13.2. Показать, что группа гомотетий $x' = \lambda x$ в $\mathbb{R}^n$ изоморфна группе $\mathbb{R}_0$. Найти ее операторы.

13.3. Показать, что преобразования $z' = \alpha z + \beta$ на $\mathbb{C}$, где $|\alpha| = 1$ образует группу Ли. Найти ее вещественную реализацию.

13.4. Доказать, что группа $GA(n, \mathbb{R})$ аффинных преобразований $x' = Ax + a$ изоморфна группе матриц $\begin{bmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, где $A \in GL(n, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^n$.

13.5. Показать, что группа движений евклидовой плоскости E^2 изоморфна группе комплексных 2-матриц вида $A = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$.

13.6. Найти параметрическую группу группы аффинных преобразований прямой: $x' = a^2 x + a^1$, $a^2 \neq 0$.

13.7. Проверить, что следующие множества преобразований образуют 1-параметрические группы Ли и найти их операторы:

$$\begin{aligned} 1) \quad x' &= \frac{x}{1 - tx} & ; & \quad 2) \quad x' = tx, \quad y' = ty, \quad (t \neq 0); \\ 3) \quad x' &= x \operatorname{ch} t + y \operatorname{sh} t, & \quad y' &= x \operatorname{sh} t + y \operatorname{ch} t. \end{aligned}$$

13.8. Показать, что преобразования в E^n : $x' = \lambda x + a$, $\lambda \neq 0$ образуют группу Ли. Найти ее операторы и структурные уравнения.

13.9. Найти операторы и структурные уравнения группы центрально-аффинных преобразований на плоскости: $x' = a^1 x + a^2 y$, $y' = a^3 x + a^4 y$.

13.10. Найти операторы и структурные уравнения группы движений псевдоевклидовой плоскости: $x' = x \operatorname{ch} a^3 + y \operatorname{sh} a^3 + a^1$, $y' = x \operatorname{sh} a^3 + y \operatorname{ch} a^3 + a^2$.

13.11. Найти операторы и структурные уравнения группы проективных преобразований: $x' = \frac{a^1 x + a^2}{1 - a^3 x}$, $a^2 \neq 0$.

13.12. Дано действие группы $GL(2, \mathbb{R})$ на проективной прямой: $\varphi(A) = \frac{a^1 x + a^2}{a^3 x + a^4}$. Найти дифференциал φ_* этого

гомоморфизма. Рассмотреть его сужение на подгруппу $SL(2, \mathbb{R})$.

13.13. Группа $GL(n, \mathbb{R})$ действует в $\mathbb{R}^n$ как группа линейных операторов $x' = Ax$. Найти инфинитезимальные операторы и структурные уравнения этой группы преобразований.

13.14. Пусть группа $GL(n, \mathbb{R})$ естественным образом действует в $\mathbb{R}^n$ (см. предыдущую задачу). Показать, что операторы $X_\beta^\alpha = x^\alpha \partial_\beta$, $X_\alpha = x^\alpha \partial_\alpha - x^\beta \partial_\beta$ ($\alpha \neq \beta$, по α, β не суммировать) порождают нормальный делитель.

13.15. Найти операторы и структурные уравнения аффинной группы преобразований в A^n : $x' = Ax + a$. Показать, что переносы $x' = x + a$ образуют нормальный делитель.

13.16. Найти операторы и структурные уравнения группы вращений в E^n .

13.17. Найти операторы группы вращений псевдоевклидова пространства $E_{p,q}^n$.

13.18. Найти операторы и структурные уравнения группы $GL(n, \mathbb{R})$, действующей на многообразии базисов $\mathbb{R}^n$: $Ae_\alpha = A_\alpha^\beta e_\beta$.

13.19. Найти операторы группы проективных преобразований в $\mathbb{P}^n$. Доказать, что она проста.

13.20. Группа $GL(n, \mathbb{R})$ действует стандартным образом в пространстве билинейных форм $g(x, y)$ на $\mathbb{R}^n$. Найти ее операторы.

13.21. Являются ли векторные поля на $\mathbb{R}^3$: $X_1 = \partial_1$, $X_2 = z \partial_2$, $X_3 = y \partial_1 + x \partial_2$ операторами некоторой группы преобразований?

13.22. Найти функцию $f(x, y)$ такую, чтобы $X_1 = \partial_1$, $X_2 = x \partial_1 + \partial_2$, $X_3 = x^2 \partial_1 + f \partial_2$ были операторами группы Ли преобразований.

13.23. При каком $f(x, y)$ векторные поля $X_1 = \partial_1$, $X_2 = x \partial_1$, $X_3 = x^2 \partial_1 + f \partial_2$ являются операторами группы Ли преобразований?

13.24. Доказать, что всякое собственное движение $x' = Ax + a$, $A \in SO(2)$ евклидовой плоскости есть либо перенос, либо вращение.

13.25. Группа вращений в E^3 имеет инфинитезимальные операторы

$$X_1 = (0, -z, y), \quad X_2 = (z, 0, -x), \quad X_3 = (-y, x, 0).$$

Найти стационарную подгруппу точки $(1, 0, 0)$.

13.26. Найти оператор группы вращений в E^3 вокруг оси, образующей с осями прямоугольных координат углы α, β, γ .

13.27. Для группы проективных преобразований прямой найти стационарную подгруппу несобственной точки.

13.28. Найти стационарную подгруппу $H \subset PL(n, \mathbb{R})$ точки x проективного пространства.

13.29. Унитарная группа $U(3)$ действует на комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ стандартным образом: в однородных координатах $Z' = A_{\beta}^{\alpha} Z^{\beta}$. Найти стационарную подгруппу точки $Z = (0 : 0 : 1)$.

13.30. Группа $\mathbb{R}$ действует на единичной окружности S по формуле $Z' = Z e^{2\pi i t}$. Найти стационарную подгруппу точки $Z = 1$. Обобщить пример на n -мерный случай.

13.31. Пусть M — G -пространство. Доказать, что стационарная подгруппа $H(x)$ в точке x есть замкнутая подгруппа в G .

13.32. Записать оператор группы вращений в полярных координатах (r, φ) плоскости.

13.33. Записать операторы группы $X_1 = -y\partial_1 + x\partial_2$, $X_2 = \partial_3$ в полярно-цилиндрических координатах (r, φ, z) : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$.

13.34. Какой вид примут операторы группы вращений в E^3 (задача 13.26) в полярно-сферической системе координат (r, φ, θ) :

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cos \theta \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta ?$$

13.35. Показать, что группа проективных преобразований в $\mathbb{P}^2$ (см. задачу 13.19) допускает подгруппы Ли со следующими операторами:

- 1) $\{\partial_{\alpha}, x^{\beta} \partial_{\alpha}\}$; 2) $\{x^{\beta} \partial_{\alpha}, x^{\alpha} x^{\beta} \partial_{\alpha}\}$;
- 3) $\{\partial_{\alpha}, x^1 \partial_2, x^1 \partial_1 - x^2 \partial_2, x^2 \partial_1\}$;
- 4) $\{x^1 \partial_2; x^1 \partial_1 - x^2 \partial_2, x^2 \partial_1, x^{\alpha} x^{\beta} \partial_{\alpha}\}$;
- 5) $\{\partial_{\alpha}, x^1 \partial_1, x^1 \partial_2, x^2 \partial_2\}$.

13.36. Группа Ли преобразований в $\mathbb{R}^2$ задана операторами $\{\partial_1, \partial_2, x\partial_1, y\partial_2\}$. Найти двумерные подгруппы Ли, содержащие оператор $Y = \partial_1 + y\partial_2$.

13.37. Группа преобразований в $\mathbb{R}^3$ задана следующими операторами: $X_1 = (1, 0, 0)$, $X_2 = (0, 1, 0)$, $X_3 = (x, 2y, 0)$,

$$X_4 = (-2y, 0, xz), \quad X_5 = (0, 0, z).$$

Показать, что $\{X_1, X_2, X_3\}$ есть коммутативный идеал.

13.38. Показать, что группа G с операторами $X_1 = \partial_1$, $X_2 = \partial_2$, $X_3 = x \partial_2$, $X_4 = x^2 \partial_2$ разрешима и что $\{X_2\} \subset \{X_2, X_3\} \subset \{X_2, X_3, aX_1 + bX_3\} \subset \mathfrak{g}$ есть система вложенных идеалов.

13.39. Показать, что проективная группа прямой (задача 13.II) гомоморфна группе Ли с операторами $X_1 = \partial_1$, $X_2 = x \partial_1$, $X_3 = x^2 \partial_1$, $X_4 = \partial_2$.

13.40. Алгебра Ли задана инфинитезимальными операторами $X_1 = \partial_1$, $X_2 = \partial_2$, $X_3 = x \partial_2 + \partial_3$, $X_4 = 3x \partial_1 + y \partial_2 - 2z \partial_3$. Найти группу внутренних автоморфизмов этой алгебры.

13.41. Показать, что проективная группа на прямой неразрешима.

13.42. Показать, что группа вращений в E^4 разлагается в прямое произведение двух нормальных делителей с операторами

$$\begin{aligned} 1) & X_2^1 + X_4^3, X_1^3 + X_4^2, X_3^2 + X_4^1; \\ 2) & X_2^1 - X_4^3, X_1^3 - X_4^2, X_3^2 - X_4^1. \end{aligned}$$

13.43. Показать, что функции $\{ \alpha_i^{\alpha}(x) \}$ являются компонентами векторного поля на M при фиксированном i и ковекторного поля на G при фиксированном α .

13.44. Группы Ли преобразований, действующие на M , называются подобными, если их групповые функции переходят друг в друга преобразованием координат на M и G . Показать, что следующие группы преобразований на $\mathbb{R}$ подобны: $x = ax, (a \neq 0)$; $y = y + b$.

13.45. Показать, что группа вращений в E^2 подобна группе переносов в области $(0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$.

13.46. Найти инфинитезимальные операторы присоединенной группы $Ad(G)$.

13.47. Пусть X, Y — векторные поля и φ_t, ψ_t — порожденные ими однопараметрические группы преобразований. Доказать, что если $[X, Y] = 0$, то φ_t, ψ_t коммутируют:

$$\varphi_t \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi_t.$$

13.48. Пусть φ_t — однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия, порожденная векторным полем Y . Доказать, что

$$[X, Y] = \frac{d}{dt} (\varphi_t^* X - X).$$

13.49. Пусть M — G -пространство. Показать, что фундамен-

тальное распределение $dx^a - \sum_i^a (x) \theta^i = 0$ на $G \times M$, где $\{\theta^i\}$ – базис левоинвариантных форм на G , вполне интегрируемо в силу структурных уравнений группы Ли.

13.50. Пусть M и N – G -пространства и $\varphi: M \rightarrow N$ – дифференцируемое эквивариантное отображение: $\varphi(a \cdot x) = a \cdot \varphi(x)$. Доказать, что операторы групп, соответствующие элементу $\mathfrak{g}$, φ -связаны: $Y = \varphi_* X$. Обратно, если это условие выполнено и G связна, то φ эквивариантно.

§ 14. Однородные пространства

Действие группы Ли G на многообразии M называется транзитивным, если для любых двух точек $x, y \in M$ найдется элемент $a \in G$ такой, что $y = a \cdot x$. G -пространство M называется в этом случае однородным. В частности, если для произвольных $x, y \in M$ существует лишь единственное преобразование, переводящее x в y , то в этом случае говорят, что группа действует просто транзитивно. Морфизмы однородных G -пространств – это гладкие отображения $\varphi: M \rightarrow M'$, перестановочные с действием группы:

$$\varphi(a \cdot x) = a \cdot \varphi(x). \quad (I)$$

Такие отображения называют также эквивариантными.

В том случае, когда рассматривается локальная группа Ли преобразований, говорят о локальной транзитивности и о локально однородном пространстве. С помощью операторов группы можно дать признак локальной однородности. Пусть $q = \text{rang}(\sum_i^a (x))$ – общий ранг матрицы, составленный из координат операторов, т.е. ранг, рассматриваемый в произвольной точке. Ясно, что $q \leq \min(n, z)$. Оказывается, что для локальной транзитивности необходимо и достаточно, чтобы $q = n$. Как следствие этого $z \geq n$. В частности, в просто транзитивном случае должно быть $q = n = z$.

Универсальной моделью всякого однородного пространства является следующая. Пусть $H \subset G$ – замкнутая подгруппа Ли. Рассмотрим факторпространство G/H – множество левых смежных классов $\{aH : a \in G\}$ с естественной проекцией $\omega: G \rightarrow G/H$, определенной формулой $\omega(a) = aH$. Тогда оказывается, что на G/H имеется единственная структура гладкого многообразия такая, что ω – гладкое отображение. Более того, $\omega: G \rightarrow G/H$ есть

главное локальное тривиальное расслоение со структурной группой H , а отображение $a \rightarrow aH$ определяет правое действие H на G , просто транзитивное на слоях.

Так как естественное действие группы G на себе левыми сдвигами переводит левые смежные классы в левые смежные классы:

$L_a(vH) = avH$, т.е. сохраняет расслоение, то тем самым индуцируется левое действие G на факторпространстве. Более того, легко видеть, что это действие гладкое и транзитивное. Это означает, что G/H есть однородное G -пространство. Обратно, всякое однородное G -пространство диффеоморфно факторпространству G/H , где H — стационарная подгруппа произвольно выбранной точки x_0 . Диффеоморфизм $\psi: G/H \rightarrow M$ определяется формулой

$$\psi(aH) = a \cdot x_0. \quad (2)$$

Если, в частности, $H \subset G$ — замкнутый нормальный делитель, то однородное пространство G/H , как мы видели в § 7, наследует от G естественную групповую структуру, превращаясь в факторгруппу Ли. Другой частный случай — G действует на M просто транзитивно. Тогда $H = \{e\}$ и поэтому M диффеоморфно G . Этот диффеоморфизм устанавливается фиксацией произвольно выбранной точки x_0 : $\psi(a) = a \cdot x_0$.

Пусть G — связная группа Ли и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра Ли, соответствующая замкнутой подгруппе $H \subset G$. Однородное пространство G/H называется редуктивным, если подалгебру $\mathfrak{h}$ можно дополнить таким векторным подпространством $\mathfrak{m}$, что

$$1) \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}; \quad 2) \text{Ad}(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}. \quad (3)$$

Если G и H связны, то второе условие эквивалентно $\text{ad}(\mathfrak{h})\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Например, если G — полупростая группа Ли, то G/H редуктивно. Действительно, так как форма Киллинга на G в этом случае невырожденная, то в качестве $\mathfrak{m}$ можно взять ортогональное дополнение $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^\perp$. При этом в силу инвариантности формы Киллинга будет обеспечена и $\text{Ad}(H)$ -инвариантность редуктивного дополнения.

Важный класс редуктивных пространств образует симметрические пространства. Пусть σ — инволютивный автоморфизм связной группы Ли: $\sigma^2 = id$, G^σ — замкнутая подгруппа, состоящая из неподвижных точек этого автоморфизма, $G_e^\sigma \subset G^\sigma$ — ее компонента единицы. Пусть H замкнутая подгруппа в G такая, что

$$G_e^{\mathfrak{g}} \subset H \subset G^{\mathfrak{g}}. \quad (4)$$

Тогда говорят, что G/H есть симметрическое однородное пространство. Оказывается, что оно всегда редутивно. В самом деле, инволютивный автоморфизм $\mathfrak{g}_*$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяет ее редутивное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, где

$$\mathfrak{h} = \{ u \in \mathfrak{g} : \mathfrak{g}_*(u) = u \}, \quad \mathfrak{m} = \{ u \in \mathfrak{g} : \mathfrak{g}_*(u) = -u \}. \quad (5)$$

Особый интерес представляют однородные пространства G/H с компактной подгруппой H . Они допускают, как можно доказать, G -инвариантную риманову метрику. В частности, симметрическое однородное пространство с компактным H является симметрическим римановым пространством.

Пример I. Специальная ортогональная группа $SO(n+1, \mathbb{R})$ гладко и транзитивно действует на сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Транзитивность следует из того, что всякий единичный вектор $x = (x^1, \dots, x^{n+1})$ может быть получен из вектора $e_{n+1} = (0, \dots, 1)$ вращением, матрица которого имеет последний столбец $A_{n+1}^\alpha = x^\alpha$. Стационарная подгруппа H точки e_{n+1} образована матрицами $\begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, где $A_n \in$

$SO(n, \mathbb{R})$ и изоморфна $SO(n, \mathbb{R})$. Поэтому $SO(n+1)/SO(n)$ диффеоморфно S^n . Диффеоморфизм задается отображением $AH \rightarrow Ae_1$.

Заметим, что S^n является, кроме того, симметрическим однородным пространством. В самом деле, рассмотрим матрицу $B = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Так как $B^2 = I$, то преобразование $\mathfrak{g}(A) = BAB$, $A \in SO(n+1, \mathbb{R})$ на группе есть инволюция. Ее неподвижные точки удовлетворяют условию $BAB = A$, откуда следует $A \in SO(n, \mathbb{R})$. Таким образом, в рассматриваемом случае $G_e^{\mathfrak{g}} = SO(n, \mathbb{R}) = G^{\mathfrak{g}}$.

Продолжая инволюцию в алгебру Ли $SO(n+1, \mathbb{R})$, получим инволюцию $\mathfrak{g}_*(u) = B u B$. Собственное подпространство, отвечающее корню $\lambda = 1$, есть подалгебра $\mathfrak{h}$, образованная матрицами $\begin{bmatrix} u_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

где u_n кососимметричны. Это подалгебра $SO(n, \mathbb{R})$. Дополнительное к ней подпространство $\mathfrak{m}$ состоит из матриц, удовлетворяющих условию $B u B = -u$. Это матрицы вида $\begin{bmatrix} 0 & -x^T \\ x & 0 \end{bmatrix}$, где $x \in \mathbb{R}^n$.

Пример 2. Пусть $GL^+(n, \mathbb{R})$ – группа Ли n – матриц с положительным определителем, $SO(n, \mathbb{R})$ – подгруппа ортогональных матриц. Ей соответствует подалгебра Ли $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ кососимметричных матриц. Известно, что всякая матрица может быть единственным образом представлена как сумма симметричной и кососимметричной матриц. Поэтому имеет место разложение $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ – подпространство симметричных матриц. Кроме того, если $u \in \mathfrak{m}$, то для любой ортогональной матрицы $A \in SO(n, \mathbb{R})$ $Ad(A)u = AuA^{-1} \in \mathfrak{m}$. Следовательно, условия (3) выполнены и $GL^+(n, \mathbb{R}) / SO(n, \mathbb{R})$ – редуктивное пространство.

Пример 3. Типичным примером просто транзитивного действия группы G является ее действие на самой себе левыми (или правыми) сдвигами: $L_a b = ab$. Действительно, уравнение $c = ab$ на группе всегда однозначно разрешимо относительно a : $a = cb^{-1}$. В частности, стационарная подгруппа всякой точки $H = \{e\}$. Указанное действие группы на себе называется левым (соответственно правым) регулярным представлением.

14.1. Группа $SL(2, \mathbb{R})$ действует на верхней полуплоскости $\mathbb{C} : \Im z > 0$ преобразованиями $z' = \frac{az + b}{cz + d}$. Показать, что это действие транзитивно и найти стационарную подгруппу.

14.2. Показать, что действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}_o^n$ по формуле $x' = Ax$ транзитивно. Найти стационарную подгруппу.

14.3. Группа Ли $SO(n+1)$ транзитивно действует на сфере S^n . Стационарная подгруппа точки $x_o = (0, \dots, 1) \in S^n$ есть $SO(n)$. Найти стационарную подгруппу произвольной точки $x \in S^n$.

14.4. Пусть M – однородное пространство группы G . Доказать, что стационарные подгруппы H_x, H_y любой пары точек $x, y \in M$ есть сопряженные (и, следовательно, изоморфные) подгруппы в G .

14.5. Показать, что аффинная группа $GA(n)$ транзитивно действует на многообразии $A_{n,k}$ всех k – плоскостей пространства A^n при любом $1 \leq k < n$. Найти стационарную подгруппу k – плоскости и размерность многообразия $A_{n,k}$.

14.6 Пусть X_i – операторы просто транзитивной группы G . Доказать, что коммутирующие с ними векторные поля $Y : [X_i, Y] = 0$ определяют просто транзитивную группу G , подобную данной. (Она называется взаимной с G).

14.7. Показать, что группы правых и левых сдвигов на группе Ли G являются взаимными группами преобразований (см. задачу 14.6).

14.8. Показать, что группа преобразований $z' = az + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ действует просто транзитивно на $\mathbb{C} \setminus (\operatorname{Im} z = 0)$. Найти операторы и преобразования взаимной группы.

14.9. В $\mathbb{R}^2$ действует группа преобразований $G: x' = x + ny + m$, $y' = y + n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$. Найти факторпространство $\mathbb{R}^2 / G$.

14.10. Доказать, что следующие преобразования в $\mathbb{R}^2$ образуют группы ($m, n \in \mathbb{Z}$):

- 1) $x' = x + n$, $y' = y$;
- 2) $x' = x + n$, $y' = y + m$;
- 3) $x' = x + n$, $y' = (-1)^n y$;
- 4) $x' = x + n$, $y' = (-1)^n y + m$.

Найти факторпространства $\mathbb{R}^2 / G$.

14.11. Действие циклической группы второго порядка $\mathbb{Z}_2$ на сфере S^n определено формулой $x \rightarrow -x$. Найти факторпространство $S^n / \mathbb{Z}_2$.

14.12. Группа $\mathbb{R}_+$ действует на $\mathbb{R}_+^n$ как группа гомотетий $x' = \lambda x$. Найти факторпространство $\mathbb{R}_+^n / \mathbb{R}_+$.

14.13. Группа $\mathbb{R}_o$ ($\mathbb{C}_o$) действует на $\mathbb{R}_o^n$ ($\mathbb{C}_o^n$) как группа гомотетий $x' = \lambda x$, $\lambda \neq 0$. Найти факторпространство $\mathbb{R}_o^n / \mathbb{R}_o$ ($\mathbb{C}_o^n / \mathbb{C}_o$).

14.14. Действие группы S^1 комплексных чисел единичного модуля на сфере S^{2n+1} задано формулой $\lambda \cdot x = \lambda x$, $x \in S^{2n+1}$, $\lambda \in S^1$. Найти факторпространство S^{2n+1} / S^1 .

14.15. Пусть S^3 — группа кватернионов единичного модуля: $q = z_1 + z_2 j$, $\bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 = 1$. Показать, что $H \subset S^3$, определяемое уравнением $\bar{z}_2 = 0$, есть подгруппа Ли. Найти факторпространство S^3 / H .

14.16. Найти левое действие группы $SL(2, \mathbb{R})$ на однородном пространстве $SL(2, \mathbb{R}) / H$, где подгруппа Ли H образована

матрицами $\begin{bmatrix} d^{-1} & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$, $d \neq 0$.

14.17. Пусть G — группа действительных треугольных матриц $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{bmatrix}$, $a > 0$ и H — подгруппа матриц $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$. Найти пространство G/H левых смежных классов и действие G на G/H .

14.18. При условиях предыдущей задачи построить действие группы G на пространстве $G \setminus H$ правых смежных классов. Сравнить результаты.

14.19. Пусть группа $GL(n, \mathbb{R})$ действует в $\mathbb{R}_0^n$ и $X = A^\alpha_\beta x^\beta \partial_\alpha$ ее инфинитезимальные операторы. С помощью проекции $p: \mathbb{R}_0^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ найти операторы Y ее проективного представления.

14.20. Пусть G — компактная группа Ли и $H \subset G$ — подгруппа Ли. Доказать, что факторпространство G/H компактно.

14.21. Доказать, что факторпространство G/H дискретно тогда и только тогда, когда подгруппа H открыта в G .

14.22. Доказать, что группа G действует на G/H эффективно тогда и только тогда, когда H не содержит нормального делителя N группы G .

14.23. Доказать, что если группа Ли G имеет связную подгруппу H со связным факторпространством G/H , то она связна.

14.24. Пусть $H \subset G$ — замкнутая подгруппа связной группы Ли. Доказать, что если G/H — односвязно, то подгруппа H связна.

14.25. Пусть G — связная группа Ли и $H \subset G$ — замкнутая, связная и односвязная подгруппа Ли, факторногообразие G/H по которой односвязно. Тогда группа G тоже односвязна. Доказать.

14.26. Пусть G — группа Ли и H — ее замкнутая подгруппа Ли. Доказать, что $\omega: G \rightarrow G/H$ является локально тривиальным главным расслоением со структурной группой H .

14.27. Найти операторы регулярного представления мультипликативной группы $\mathbb{C}_0$ комплексных чисел.

14.28. Доказать, что группа $x' = ax - by, y' = bx + ay$, $a^2 + b^2 \neq 0$ просто транзитивна на $\mathbb{R}^2$ и найти компоненты групповой связности.

14.29. Показать, что левое и правое регулярные представления группы Ли эквивалентны.

14.30. Найти левое регулярное представление группы Ли $SU(1, 1)$.

14.31. Найти левое регулярное представление группы ненулевых кватернионов $\mathbb{H}_0$. При каком условии оператор L_q ортогонален?

14.32. Найти правое регулярное представление мультипликативной группы Ли кватернионов $\mathbb{H}_0$. Вывести отсюда, что группа Ли S^3 изоморфна группе $SU(2)$.

14.33. Найти левое регулярное представление группы $SU(2)$. Сравнить результат с примером № 2.

14.34. Пусть группа кватернионов единичного модуля S^3 дейст-

вует на себе левыми сдвигами. Найти преобразования, которые они индуцируют на факторпространстве $S^2 = S^3/S^1$.

I4.35. Показать, что однородное пространство $SU(1,1)/U(1)$ может быть представлено в виде единичного круга $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а действие $SU(1,1)$ на D задано дробно-линейными преобразованиями $z' = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}$, $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$.

I4.36. Естественное действие группы $O(n+1, \mathbb{R})$ на E^{n+1} ортогональными операторами проектируется в проективное пространство $\mathbb{P}^n = S^n/\mathbb{Z}_2$. Показать, что действие $O(n+1, \mathbb{R})$ в $\mathbb{P}^n$ транзитивно и найти каноническую модель этого пространства.

I4.37. Показать, что унитарная группа $U(n)$ действует транзитивно на сфере $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, заданной уравнением $z_1\bar{z}_1 + \dots + z_n\bar{z}_n = 1$. Найти ее каноническую модель.

I4.38. Доказать, что

- 1) $U(n)/U(n-1)$ диффеоморфно S^{2n-1} , $n \geq 2$;
- 2) $Sp(m)/Sp(m-1)$ диффеоморфно S^{4m-1} , $m \geq 2$.

I4.39. Используя результат задачи I4.4I, вычислить фундаментальную группу унитарной группы $U(n)$.

I4.40. Доказать, что группа $SU(n)$ односвязна ($n \geq 2$).

I4.4I. Доказать, что группа $Sp(m)$ односвязна.

I4.42. Показать, что многообразие $SL(n, \mathbb{C})/SU(n)$ диффеоморфно $\mathbb{R}^m$.

I4.43. Показать, что факторпространство $GL(n, \mathbb{R})/O(n, \mathbb{R})$ диффеоморфно $\mathbb{R}^m$, где $m = \frac{1}{2}n(n+1)$.

I4.44. Пусть A^n — аффинное пространство. Показать, что A^n диффеоморфно $GA(n)/GL(n, \mathbb{R})$.

I4.45. Показать, что вещественное проективное пространство диффеоморфно $SO(n+1)/O(n)$.

I4.46. Группа $GL(2n, \mathbb{R})$ действует на многообразии M всех комплексных структур на $\mathbb{R}^{2n}$ по правилу $J' = AJA^{-1}$. Показать, что это действие транзитивно и найти каноническую модель для M .

I4.47. Пусть $Gz(n, k)$ многообразие Грассмана. Группа $GL(n, \mathbb{R})$ действует на $Gz(n, k)$ следующим образом: $E(e_1, \dots, e_k) \mapsto AE = E(Ae_1, \dots, Ae_k)$, где $E(e_1, \dots, e_k)$ есть k -плоскость, натянутая на линейно независимые векторы $e_1, \dots, e_k$. Доказать, что $GL(n, \mathbb{R})$ действует транзитивно. Найти каноническую модель грассманового многообразия и его размерность.

14.48. Показать, что грассманово многообразие $\tilde{G}z(n, k)$ ориентированных k -плоскостей в $\mathbb{R}^n$ есть однородное пространство относительно естественного действия группы $SO(n, \mathbb{R})$. Найти его каноническую модель.

14.49. Показать, что группа $O(n, \mathbb{R})$ действует на многообразии Грассмана $Gz(n, k)$ транзитивно и найти его каноническую модель.

14.50. Доказать, что унитарная группа $U(n)$ действует на комплексном многообразии Грассмана $Gz(n, k)$ транзитивно и найти его каноническую модель.

14.51. Пусть $A(n, k)$ - многообразие всех k -плоскостей $E(x, e_1, \dots, e_k)$ аффинного пространства A^n , где x - опорная точка, $e_1, \dots, e_k$ - направляющие векторы. Аффинная группа $GA(n)$ действует на $A(n, k)$ следующим образом: $AE(x, e_1, \dots, e_k) = E(Ax, Ae_1, \dots, Ae_k)$. Доказать, что это действие транзитивно. Найти каноническую модель многообразия $A(n, k)$ и его размерность.

14.52. Множество $V_{n,k}$ упорядоченных наборов ортонормированных векторов в E^n называется многообразием Штифеля. Показать, что действие группы $O(n, \mathbb{R})$ на $V_{n,k}$ по правилу $Ax = (Ae_1, \dots, Ae_k)$ является транзитивным. Найти каноническую модель этого пространства.

14.53. Пусть $M_{n,k}$ - многообразие k -пар плоскостей в $\mathbb{R}^n$, т.е. прямых разложений $\mathbb{R}^n = L^k \oplus N^{n-k}$. Показать, что действие группы $GL(n, \mathbb{R})$ на $M_{n,k}$ транзитивно. Найти каноническую модель этого пространства и его размерность.

14.54. Флагом в $\mathbb{K}^n$ называется набор вложенных друг в друга подпространств $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = \mathbb{K}^n$ размерностей $\dim L_k = k$. Показать, что многообразие флагов $\mathcal{M}$ является однородным $GL(n, \mathbb{K})$ -пространством. Найти стационарную подгруппу точки $x \in \mathcal{M}$.

14.55. Показать, что аффинная группа $GA(n)$ действует в A^n транзитивно. Найти стационарную подгруппу точки. Является ли алгебра Ли этой группы редуктивной?

14.56. Группа преобразований задана операторами

$$X_1 = (1 - x^2)\partial_1 - xy\partial_2, \quad X_2 = -xy\partial_1 + (1 - y^2)\partial_2, \quad X_3 = -y\partial_1 + x\partial_2.$$

Доказать, что алгебра Ли этой группы редуктивна.

14.57. Группа $GL^+(n, \mathbb{R})$ транзитивно действует на R_0^n , $n \geq 2$. Является ли это однородное пространство редуктивным?

I4.58. Группа Ли $SL(n+1, \mathbb{R})$ стандартным образом действует на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$. Показать, что $\mathbb{P}^n$ есть однородное пространство. Является ли оно редуктивным?

I4.59. Показать, что действие $x' = Ax$ группы $SL(n+1, \mathbb{R})$ на $\mathbb{P}^n$ индуцирует ее транзитивное действие на многообразии гиперплоскостей Π^n . Является ли это многообразие редуктивным?

I4.60. Показать, что многообразие K -пар из задачи I4.53 редуктивно.

I4.61. Пусть $M_{n,k}$ - многообразие ортогональных k -пар в евклидовом векторном пространстве E^n . Показать, что оно является однородным пространством группы $O(n)$. Доказать его редуктивность.

I4.62. Пусть $M = \mathfrak{G}/H$ - однородное пространство. Если ограничение формы Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$ невырождено, то M редуктивно. Доказать.

I4.63. Пусть $H \subset G$ - компактная подгруппа связной группы Ли. Доказать, что однородное пространство G/H редуктивно.

I4.64. Пусть G/H - однородное симметрическое пространство. Показать, что $[m, m] \subset \mathfrak{h}$.

I4.65. Показать, что $\mathcal{G}(A) = B A B$, где $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ есть

инволютивный автоморфизм группы $SO(3)$. Найти множество его неподвижных точек.

I4.66. Показать, что комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ есть симметрическое пространство относительно действия унитарной группы $U(n+1)$ и инволютивного автоморфизма $\mathcal{G}(A) = B A B^{-1}$, где

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

I4.67. Группа $SO(n+1)$, действующая в $\mathbb{C}P^n$ как подгруппа в $U(n+1)$, оставляет инвариантной квадрику $Q: \sum_{\alpha=0}^n z^\alpha \bar{z}^\alpha = 0$. Показать, что Q относительно действия $SO(n+1)$ является симметрическим пространством и найти каноническое разложение алгебры Ли $SO(n+1)$.

I4.68. Группа $O(1, n)$, действующая в $\mathbb{R}^{n+1}$, оставляет инвариантной квадрику $Q: (x^0)^2 - \sum_{\alpha=1}^n (x^\alpha)^2 = 1$ со связной компонентой $Q_0 = \{x \in Q: x^0 \geq 1\}$. Компонента единицы $G \subset O(1, n)$ действует на Q_0 транзитивно. Найти каноническую модель этого

однородного пространства (пространство Лобачевского) и показать, что оно является симметрическим с инволюцией $\mathcal{G}(A) = B A B^{-1}$,

где $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$.

14.69. Показать, что однородное пространство $SO(p, q)/SO(p-1, q)$ является симметрическим и может быть представлено в виде гиперболоида $(x^1)^2 + \dots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \dots - (x^{p+q})^2 = 1$.

14.70. Пусть $G_2(n, \kappa) = O(n)/O(\kappa) \times O(n-\kappa)$ — грассманово многообразие и $\mathcal{G} : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}$. Показать, что это инволюция на $O(n)$, определяющая $G_2(n, \kappa)$ как однородное симметрическое пространство.

14.71. Показать, что многообразие ориентированных κ -плоскостей в $\mathbb{R}^n$ (см. задачу 14.48) есть симметрическое пространство

с инволюцией $\mathcal{G}(A) = B A B^{-1}$, где $B = \begin{bmatrix} -I_\kappa & 0 \\ 0 & I_{n-\kappa} \end{bmatrix}$. Найти каноническое разложение алгебры $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$.

14.72. Пусть G — односвязная компактная группа Ли и $\mathcal{G}$ — инволютивный автоморфизм ($\mathcal{G}^2 = id$). Пусть $H = \{a \in G : \mathcal{G}(a) = a\}$ и $K = \{a \in G : \mathcal{G}(a) = a^{-1}\}$. Доказать, что $K = G/H$ — однородное пространство.

14.73. Доказать, что всякое однородное пространство G/H с компактной подгруппой H допускает G -инвариантную риманову метрику.

14.74. На многообразии M положительно определенных эрмитовых n -матриц с единичным определителем действует группа $SL(n, \mathbb{C})$ по формуле $\varphi(A)X = A X A^*$. Показать, что это действие транзитивно и найти стандартную модель этого однородного пространства. Показать, что M — симметрическое риманово пространство с инволюцией $\mathcal{G}(A) = (A^*)^{-1}$.

14.75. Показать, что $SU(1, 1)/U(1)$ (задача 14.35) является симметрическим римановым пространством. Найти риманову метрику.

14.76. Показать, что при условиях задачи 14.1 форма Киллинга $B(X, Y) = 4tz(XY)$ группы $SL(2, \mathbb{R})$ индуцирует на M риманову метрику.

14.77. Доказать, что $SO(n+1)/SO(n)$ и $SO_e(n, 1)/SO(n)$ есть пространства постоянной кривизны.

14.78. Показать, что $SO(3)/SO(2)$ и $SO_e(2, 1)/SO(2)$ есть двумерная сфера и плоскость Лобачевского соответственно.

Пусть x_0 — точка G -пространства. Тогда под действием группы она описывает многообразие $G \cdot x_0 = \{a \cdot x_0 : a \in G\}$, которое называется G -орбитой этой точки. Локально параметрические уравнения орбиты можно записать в виде

$$x^\alpha = f^\alpha(a^1, \dots, a^z, x_0) \quad (I)$$

Ясно, что на каждой своей орбите группа действует транзитивно. Орбиты определяют разбиение многообразия M на классы G -эквивалентных точек. В частности, если группа G транзитивна, то орбита всякой точки есть все G -пространство.

Если действие группы Ли задано инфинитезимальными операторами X_i , то для нахождения орбит надо найти сначала ее преобразования. Пусть G — однопараметрическая группа с оператором $X = \{X^\alpha(x) \partial_\alpha$. Тогда ее локальные преобразования находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial t} = \{^\alpha (f) \quad (2)$$

с начальным условием $f^\alpha(0, x) = x^\alpha$. В случае z -параметрической группы имеем систему дифференциальных уравнений в частных производных — систему уравнений Ли:

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial a^i} = \{^\alpha_\kappa (f) V_i^\kappa(a) \quad (3)$$

Она равносильна системе $df^\alpha - \{^\alpha_\kappa (f) \theta^\kappa = 0$, заданной на многообразии $G \times M$, которая определяет фундаментальное распределение группы преобразований. В силу структурных уравнений (4), § 13 система (3) вполне интегрируема. Нахождение преобразований группы удобно производить в канонических координатах второго рода. Сначала находятся однопараметрические группы $\text{Exp}(t X_i)$, соответствующие заданным операторам. Затем преобразования локальной группы G находятся как их композиции (сравн. § 5).

Пусть $\text{rang}(\{^\alpha_i(x_0)) = q_0$. Если $q_0 = q$, т.е. совпадает с общим рангом, то точку x_0 называют обыкновенной. При $q_0 < q$ говорят об особой точке порядка q_0 . Поскольку размерность стаци-

онарной подгруппы $\kappa = \mathbb{Z} - q_0$ не изменится при движении точки по орбите, то порядок q_0 одинаков во всех точках орбиты $G \cdot x_0$. Поэтому орбиты особых точек порядка q_0 можно отыскать, приравнивая к нулю все миноры матрицы $(\xi_i^\alpha(x))$ порядка $q_0 + 1$.

При нахождении орбит обыкновенных точек применим также метод инвариантов. Функция $\mathcal{I}(x)$ называется инвариантом группы G , если она постоянна на орбитах, т.е. $\mathcal{I}(a \cdot x) = \mathcal{I}(x)$. Отсюда следует, что инварианты являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$X_i(\mathcal{I}) = \xi_i^\alpha(x) \partial_\alpha \mathcal{I} = 0 \quad (4)$$

Число функционально независимых решений равно $n - q$. Они образуют базис инвариантов $\mathcal{I}_1(x), \dots, \mathcal{I}_{n-q}(x)$. Тогда всякое решение имеет вид $F(\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_{n-q})$. Если $q = n$, то группа не имеет инвариантов — она транзитивна.

Многообразие $W \subset M$ называется инвариантным относительно группы G , если G -орбиты его точек содержатся в W : $G \cdot x_0 \subset W$ для любого $x_0 \in W$. Всякое обыкновенное инвариантное многообразие можно задать с помощью инвариантов уравнениями

$$F^s(\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_{n-q}) = 0 \quad (5)$$

Если m — его размерность, то число $p = m - q$ называется рангом инвариантного многообразия.

Пример I. В евклидовом E^3 рассмотрим однопараметрическую группу преобразований, заданную оператором $X = -y \partial_1 + x \partial_2$. Система (2) имеет вид

$$\frac{dx'}{dt} = -y', \quad \frac{dy'}{dt} = x', \quad \frac{dz'}{dt} = 0,$$

откуда $\frac{d^2 x'}{dt^2} + x' = 0$. Имеем общее решение

$$x' = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad y' = c_1 \sin t - c_2 \cos t, \quad z' = c_3.$$

Начальные условия $x'(0) = x, y'(0) = y, z'(0) = z$ дают преобразования этой группы:

$$x' = x \cos t - y \sin t, \quad y' = x \sin t + y \cos t, \quad z' = z.$$

Это группа вращений вокруг оси Z . Общий ранг матрицы $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$

равен $q = 1$. Орбиты обыкновенных точек — окружности с центрами на оси Z . При $x = y = 0$ ранг $q_0 = 0$. Это особые точки нулевого порядка, которые при вращении остаются неподвижными.

Найдем инварианты группы. Система (4) сводится к одному уравнению $y \partial_1 J - x \partial_2 J = 0$. Имеем два независимых инварианта

$J_1 = x^2 + y^2$, $J_2 = z$. Общее решение $F(x^2 + y^2, z)$. Инвариантные многообразия ранга $m = 1$ — это поверхности вращения $F(x^2 + y^2, z) = 0$. Инвариантные многообразия нулевого ранга задаются двумя уравнениями: $x^2 + y^2 = C_1$, $z = C_2$ — это двухпараметрическое семейство окружностей с центрами на оси z .

Пример 2. Рассмотрим группу с операторами

$$X_1 = \partial_1 + 2x \partial_2 + 3y \partial_3, \quad X_2 = x \partial_1 + 2y \partial_2 + 3z \partial_3, \quad X_3 = \partial_2 + 3x \partial_3.$$

Интегрируя систему вида (4), мы увидим, что она не имеет нетривиальных решений. Поэтому группа обыкновенных инвариантных многообразий не имеет. Вместе с тем, рассматривая матрицу

$$\left(\begin{matrix} \alpha \\ \vdots \\ i \end{matrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 2x & 2y & 1 \\ 3y & 3z & 3x \end{bmatrix},$$

мы видим, что ее ранг может понижаться до двух в точках поверхности $F = 2x^3 - 3xy + z = 0$. Это инвариантное многообразие, образованное особыми точками второго порядка. Полезно заметить, что $X_1(F) = 0$, $X_2(F) = 3F$, $X_3(F) = 0$. Таким образом, условия $X_i(F) = 0$ выполняются теперь не тождественно, но лишь при $F = 0$, т.е. на самом многообразии. Такие функции называются относительными инвариантами.

Пример 3. Пусть группа преобразований в $\mathbb{R}^2$ задана операторами

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = x \partial_1 + y \partial_2.$$

Найдем преобразования этой группы. Найдем сначала однопараметрические подгруппы преобразований, порождаемые заданными операторами. Интегрируя, как в примере I, систему (2), получим, соответственно,

$$\begin{cases} x' = x + t \\ y' = y \end{cases}; \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y + t \end{cases}; \quad \begin{cases} x' = x e^t \\ y' = y e^t \end{cases}.$$

Вычисляя композицию этих преобразований и полагая для простоты $a = e^t$, $b = t$, $c = t^2$, получим преобразования искомой группы в виде $x' = ax + b$, $y' = ay + c$.

Пример 4. Пусть в аффинной группе преобразований $GA(2)$ на

плоскости задана подгруппа Ли системой пфаффовых уравнений

$$\theta_1^1 = 0, \quad \theta_2^2 = 0, \quad \theta_2^1 + \theta_1^2 = 0,$$

где левоинвариантные 1-формы θ^α , θ_β^α образуют кобазис алгебры Ли (§ 4). Найдем преобразования этой подгруппы. Прежде всего, проверяем, что в силу структурных уравнений Маурера-Картана

$$d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \theta_\beta^\alpha, \quad d\theta_\beta^\alpha = \theta_\beta^\delta \wedge \theta_\delta^\alpha$$

эта система вполне интегрируема. Значит, она определяет подгруппу Ли. Относительно натурального корепера $(d\alpha^\alpha, d\Lambda_\beta^\alpha)$ она имеет вид

$$\theta_1^1 = \tilde{A}_1^1 d\Lambda_1^1 + \tilde{A}_2^1 d\Lambda_1^2 = 0,$$

$$\theta_2^2 = \tilde{A}_1^2 d\Lambda_2^1 + \tilde{A}_2^2 d\Lambda_2^2 = 0,$$

$$\theta_2^1 + \theta_1^2 = \tilde{A}_1^1 d\Lambda_2^1 + \tilde{A}_2^1 d\Lambda_2^2 + \tilde{A}_1^2 d\Lambda_1^1 + \tilde{A}_2^2 d\Lambda_1^2 = 0.$$

Интегрируя, находим

$$(\Lambda_\beta^\alpha) = \begin{bmatrix} c_1 \cos t & c_1 \sin t \\ c_2 \cos(t+c_3) & c_2 \sin(t+c_3) \end{bmatrix}.$$

Учитывая начальные условия $\Lambda_\beta^\alpha(0) = \delta_\beta^\alpha$, получим, что Λ есть ортогональная матрица. Таким образом, искомая подгруппа есть группа евклидовых движений.

15.1. Показать, что преобразования

$$1) x' = ax, y' = \frac{1}{a}y; \quad 2) x' = a^\kappa x, y' = a^m y, \quad (\kappa, m \in \mathbb{Z})$$

образуют однопараметрические группы Ли на $\mathbb{R}^2$. Найти их операторы и орбиты.

15.2. Найти преобразования и орбиты однопараметрических групп, заданных следующими операторами:

$$1) X = x\partial_1 + y\partial_2; \quad 2) X = x\partial_1 - y\partial_2.$$

15.3. Найти орбиты однопараметрической группы Ли на $\mathbb{R}^2$, заданной оператором $X = (x-y)\partial_1 + (x+y)\partial_2$.

15.4. Найти орбиты следующих операторов в $\mathbb{R}^2$:

$$1) X = x^2\partial_1 + y^2\partial_2; \quad 2) X = x^2\partial_1 + xy\partial_2.$$

15.5. Найти орбиты группы псевдоевклидовых вращений в $E_{1,1}^2$.

15.6. Указать все возможные типы однопараметрических подгрупп центроаффинной группы в $\mathbb{R}^2$: $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$ и их орбиты.

15.7. Оператор однопараметрической группы в $\mathbb{R}^3$ имеет координаты $X = (0, x, 1)$. Найти преобразования группы и ее орбиты.

15.8. Найти орбиты группы с оператором $X = y\partial_1 - x\partial_2 + a\partial_3$ в E^3 ($a = \text{const}$).

15.9. Найти орбиты 1-параметрической группы в $\mathbb{R}^3$ с оператором $X = (xy, -x^2, -yz)$.

15.10. Найти однопараметрические подгруппы и их орбиты в группе вращений псевдоевклидова пространства $E_{2,1}^3$, соответствующие базисным операторам (задача № 13.17).

15.11. Доказать, что преобразования всякой однопараметрической группы на многообразии локально, за счет выбора системы координат в окрестности точки $x \in M$ может быть приведено к виду

$$y'^\alpha = y^\alpha + \delta_n^\alpha t.$$

15.12. Доказать, что всякое гладкое векторное поле X на компактном многообразии порождается некоторой однопараметрической группой преобразований.

15.13. Показать, что изменение функции на M под действием однопараметрической группы преобразований с оператором X определяется формулой

$$F(x') = F(x) + tX(F) + \frac{t^2}{2}X^2(F) + \dots$$

15.14. Найти преобразования группы Ли на прямой, заданной операторами: 1) $X_1 = \partial_1$; 2) $X_1 = \partial_1$, $X_2 = x\partial_1$.

15.15. Группа Ли действует на прямой $\mathbb{R}$ и имеет операторы

$$X_1 = \partial_1, X_2 = x\partial_1, X_3 = x^2\partial_1.$$

Найти преобразования этой группы, используя канонические координаты 2-го рода.

15.16. Группа Ли преобразований на $\mathbb{R}^2$ задана операторами

$$X_1 = \partial_1, X_2 = xe^x\partial_2, X_3 = e^x\partial_2.$$

Найти преобразования этой группы.

15.17. Группа Ли преобразований в $\mathbb{R}^2$ задана операторами

$$X_1 = \partial_1, X_2 = \partial_2, X_3 = x'\partial_1, X_4 = x'\partial_2, X_5 = x^2\partial_2.$$

Найти преобразования этой группы.

15.18. Группа Ли преобразований в $\mathbb{R}^2$ имеет операторы

$$1) X_1 = \partial_1, X_2 = \partial_2, X_3 = x\partial_1 + y\partial_2;$$

$$2) X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \lambda x \partial_1 + \mu y \partial_2 \quad (\lambda, \mu = \text{const}).$$

Найти преобразования этой группы.

15.19. Группа Ли преобразований в $\mathbb{R}^n$ задана операторами

$$X_0 = x^\alpha \partial_\alpha, \quad X_\alpha = \partial_\alpha, \quad (\alpha = 1, \dots, n).$$

Используя канонические координаты 2-го рода, найти преобразования этой группы.

15.20. В группе аффинных преобразований в $\mathbb{R}^2$ найти подгруппы, определяемые следующими уравнениями:

$$1) \theta_1^1 - \theta_2^2 = 0, \quad \theta_2^1 + \theta_1^2 = 0; \quad 2) \theta^1 = 0, \quad \theta^2 = 0;$$

$$3) \theta_1^1 - \theta_2^2 = 0, \quad \theta_2^1 = 0, \quad \theta_1^2 = 0, \quad \theta^1 = 0, \quad \theta^2 = 0.$$

15.21. Найти инварианты группы: 1) вращений на евклидовой плоскости $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$; 2) псевдоевклидовых вращений $x' = x \cosh \alpha + y \sinh \alpha, \quad y' = x \sinh \alpha + y \cosh \alpha$.

15.22. Найти инварианты группы параллельных переносов в $\mathbb{R}^n$ с оператором $X = u^\alpha \partial_\alpha$.

15.23. Найти инварианты группы вращений в $\mathbb{E}^3$ и ее орбиты.

15.24. Доказать, что присоединенная группа $Ad(G)$ всегда интразитивна.

15.25. Полиномом Киллинга называется характеристический полином линейного оператора $ad(u)$, т.е. $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - ad(u))$. Доказать, что корни $\lambda(u)$, а значит, и коэффициенты этого полинома являются инвариантами присоединенной группы $Ad(G)$.

15.26. Найти операторы присоединенной группы и ее инварианты для группы проективных преобразований прямой.

15.27. Найти инварианты присоединенной группы для алгебры Ли со структурными уравнениями

$$[e_1, e_2] = 3e_1, \quad [e_1, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_3] = 3e_2.$$

15.28. Пусть $G \cdot x_0$ — орбита точки $x_0 \in M$ и $q_0 = \text{rang}(\{\xi_i^\alpha(x_0)\})$. Доказать, что $(\{\xi_i^\alpha(x)\}) = q_0$ в каждой точке этой орбиты.

15.29. Пусть $X_i = \xi_i^\alpha(x) \partial_\alpha$ — операторы группы преобразований и $G \cdot x_0$ — орбита точки $x_0 \in M$. Доказать, что

$$\dim(G \cdot x_0) = \text{rang}(\{\xi_i^\alpha(x_0)\}).$$

15.30. Пусть G — группа Ли преобразований многообразия M . Доказать, что каждая орбита $G \cdot x_0$ является подмногообразием в M , локально диффеоморфным G/H , где H — стационарная подгруппа точки x_0 .

15.31. Найти орбиты действия группы S^3 на себе с помощью внутренних автоморфизмов: $X' = q X q^{-1}$.

15.32. Исследовать орбиты тензорного представления группы $GL(n, \mathbb{R})$ в пространстве симметричных билинейных форм в $\mathbb{R}^n$. Рассмотреть случай $n=2$.

15.33. Пусть $V^K \subset V^n$ — векторное подпространство. Доказать, что множество линейных операторов $G \subset GL(V^n)$ таких, что $A(V^K) \subset V^K$, является подгруппой Ли. Найти ее орбиты.

15.34. Найти инвариантные многообразия группы Ли преобразований в $\mathbb{R}^2$ с операторами $X_1 = \partial_1 + x \partial_2$,

$$X_2 = x \partial_1 + 2y \partial_2, \quad X_3 = (x^2 - y) \partial_1 + xy \partial_2.$$

15.35. Группа Ли преобразований в $\mathbb{R}^3$ задана операторами

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = x \partial_1 + y \partial_2 + z \partial_3, \quad X_3 = x^2 \partial_1 + 2xy \partial_2 + 2xz \partial_3.$$

Найти инварианты и инвариантные многообразия этой группы.

15.36. Найти инвариантные многообразия группы с операторами

$$X_1 = -y \partial_1 + x \partial_2, \quad X_2 = x \partial_1 + y \partial_2 + z \partial_3.$$

15.37. Найти инвариантные многообразия группы Ли, действующей в $\mathbb{R}^3$ с операторами $X_1 = (x, y, z)$, $X_2 = (x^2 + y^2, 0, xz)$.

15.38. Найти инвариантные многообразия $\mathcal{M} \subset E^3$ группы с операторами $X_1 = y \partial_1 + x \partial_2$, $X_2 = \partial_3$.

15.39. Найти инвариантные многообразия группы Ли, действующей в $\mathbb{R}^3$ с операторами: $X_1 = (1, 2x, 3y)$, $X_2 = (x, 2y, 3z)$,
 $X_3 = (0, 1, 3x)$.

15.40. В $\mathbb{R}^4$ дана группа преобразований с операторами

$$X_1 = (x^1, x^2, x^3, x^4), \quad X_2 = (x^2, x^1, 0, 0),$$

$$X_3 = (x^3, 0, x^1, 0), \quad X_4 = (0, x^3, -x^2, 0).$$

Доказать, что она интранзитивна и найти ее инвариантные многообразия.

15.41. Найти инвариантные многообразия и инварианты группы гомотетий в $\mathbb{R}^n$: $X'^{\alpha} = \kappa X^{\alpha}$, ($\kappa \neq 0$).

15.42. Показать, что группа Ли преобразований в E^n с операторами $X_{\alpha} = \partial_{\alpha} - x^{\alpha} x^{\beta} \partial_{\beta}$, $X_{\beta}^{\alpha} = x^{\alpha} \partial_{\beta} - x^{\beta} \partial_{\alpha}$ составляет инвариантной гиперсферу $\sum_{\alpha=1}^n (x^{\alpha})^2 = 1$.

15.43. Для группы проективных преобразований прямой найти операторы присоединенной группы и ее инвариантные многообразия.

§ I

I.7. Пусть $G \setminus F$ открыто и $e \in G \setminus F$. В силу непрерывности групповых операций существует окрестность $V \ni e$ такая, что $VV \subset G \setminus F$. Тогда $V \cap aV = \emptyset$ для $\forall a \in F$. Отсюда следует, что $U = \bigcup_{a \in F} aV$ есть открытое множество, содержащее F и не пересекающееся с V .

I.9. Показать, что для всякой области $A \subset G$ и $\forall x \in A$ существует окрестность вида $V = u a \in \Sigma$, $a \in M$, удовлетворяющая условию $x \in V \subset A$. Для этого рассмотреть область $Ax^{-1} \ni e$. Существует окрестность единицы V такая, что $u u^{-1} \subset Ax^{-1}$. Так как множество xM^{-1} плотно в G , то $u \cap xM^{-1} \neq \emptyset$. Пусть y — элемент из этого пересечения. Показать, что открытое множество $V = u y^{-1} x$ является искомым.

I.10. Множества $U_k : |x_{\beta}^{\alpha} - \delta_{\beta}^{\alpha}| < \frac{1}{k}$, где $k = 1, 2, \dots$, образуют счетную базу окрестностей единицы. В качестве M взять плотное в $GL(n, \mathbb{R})$ множество матриц с рациональными компонентами.

I.11. Нет, так как инверсия S преобразует $\{a\}$ в множество $\{a^2\}$, которое не является открытым.

I.12. Последовательность $p, p^2, \dots, p^k, \dots$ имеет своей предельной точкой число нуль. Если $q \neq p$, то во второй топологии это не имеет места.

I.15. Непрерывный образ связного множества связан.

I.18. Рассмотреть множество $U^k = U \dots U$ (k сомножителей, $k = 1, 2, \dots$) и их объединения $M = \bigcup_k U^k$. Доказать, что M открыто и замкнуто и в силу связности группы совпадает с G .

I.19. Всякая унимодулярная матрица с помощью полярного разложения представляется в виде $X = AB$, где $A \in SO(1, R) \cong S^1$, а

B есть матрица вида $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $ac - b^2 = 1$, $a > 0$. Числа a, b можно рассматривать как координаты точки правой полуплоскости в $\mathbb{R}^2$, которая гомеоморфна кругу.

I.20. См. задачу I.19.

I.21. Использовать полярное разложение.

I.22. Обе группы гомеоморфны топологическому пространству $\mathbb{R}^2$, но не изоморфны как топологические группы: первая из них коммутативна, вторая — нет.

I.23. Отображение $\varphi(x) = x$ является изоморфизмом абстрактных групп, но не является изоморфизмом топологических групп: топология второй группы сильнее. Изоморфизм $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ задается отображением $y = e^x$.

I.25. Выбрать в V некоторый базис.

I.28. Изоморфизм осуществляется соответствием $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow A + Bi$.

I.30. Связная компонента G_x точки x может быть получена из G_e левым (или правым) сдвигом: $G_x = x G_e = G_e x$.

I.31. $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = +1$, $a > 0$.

I.36. H и N — нормальные делители. Множество $H + N$ замкнуто, если α — рациональное число. Для доказательства этого использовать то обстоятельство, что если α — иррациональное число, то для любого $\varepsilon > 0$ и действительного числа x существуют целые числа m и n такие что $|m\alpha - n - x| < \varepsilon$.

I.37. Да.

I.38. 1) да; 2) нет.

I.40. Рассмотреть смежный класс элемента $a \in \bar{H}$ и использовать то обстоятельство, что H плотно в $\bar{H}$.

I.41. Пусть $a \in \bar{Z}$. Если допустить, что для некоторого $x \in G$ $a' = xax^{-1} \neq a$, то в силу хаусдорфовости G существуют непересекающиеся окрестности $U \ni a$, $U' \ni a'$. Положим $V = Z \cap U$. Тогда $a \in V$ и $a' \in V$, что невозможно, так как $U' \cap V = \emptyset$.

I.43. Пусть $a \in N$ и $V \ni a$ — окрестность, не содержащая других элементов группы. Существует окрестность единицы U такая, что $UaU^{-1} \subset V$. Тогда $bab^{-1} = a$ для всякого $b \in U$. Представив произвольный элемент группы в виде $x = b_1 b_2 \dots b_k$, где $b_i \in U$, получим $xax^{-1} = a$.

I.44. $\mathbb{Z}_2 = \{I, -I\}$.

I.46. Нормальный делитель.

I.47. Связная группа в $GL(n, \mathbb{R})$.

I.53. Не является.

I.54. Два экземпляра окружности.

I.55. 1) Группа $T(n, \mathbb{C})$ есть топологическое произведе —

ние n экземпляров пространства $\mathbb{C}_o$ и $\frac{n(n-1)}{2}$ экземпляров пространства $\mathbb{C}$. 2) Доказательство аналогично.

I.56. Связные компоненты выделяются условиями $A_\alpha^\alpha = \pm 1$ (нет суммирования) для каждого $\alpha = 1, \dots, n$.

I.57. Показать сначала, что непрерывной деформацией матрицу $A \in SL(n, \mathbb{R})$ можно привести к виду $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$, где $A_1 \in SL(n-1, \mathbb{R})$ и затем повторить этот процесс. В итоге приходим к единичной матрице.

I.60. I) Используя разложение Крамера, представить матрицы $A \in GL(n, \mathbb{C})$ в виде произведения $A = BC$ треугольной и унитарной матриц. 2) $GL(n, \mathbb{C})$ гомеоморфна прямому произведению $\mathbb{C} \times SL(n, \mathbb{C})$.

I.62. Рассмотреть возможные комбинации элементов $\det A$ и элемента A_1^1 .

I.63. $x^1 = 0, x^2 = 0$.

I.64. I) $\{\pm I\}$; 2) $SO(2)$.

I.65. $z = \lambda I, \lambda \in \mathbb{R}_o$.

I.66. Использовать лемму Шура; $\mathbb{Z}_n = \left\{ \exp \left(\frac{2\pi k i}{n} \cdot I \right) \right\}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

I.67. Центр состоит из скалярных матриц λI , $\lambda^n = 1$ и изоморфен циклической группе $\mathbb{Z}_n$.

I.68. I) $\mathbb{Z}_2$; 2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, если n четное; 3) $\mathbb{Z}_n$, если n нечетное.

§ 2.

2.2. Введем отображения $f: G \times G \rightarrow G$, $D: G \rightarrow G \times G$ такие, что $f(a, b) = ab$, $D(a) = (a, a)$. Тогда $f \circ (id \times S) \circ D = \text{const}$ и поэтому для всякого $v \in T_a G$ получим

$0 = f_* \circ (id \times S)_* \circ D_* v = f_*(v + S_* v) = R_{a^{-1}}_* v + L_{a^{-1}}^* \circ S_* v$, откуда $S_* v$ находится.

2.3. Аналитичность отображения $a \rightarrow a^{-1}$ достаточно доказать в окрестности единицы. L_a аналитически зависит от a . Из теоремы о неявной функции следует существование такой окрестности $\mathcal{U}$ единицы, что L_a^{-1} аналитично по a . Но $(L_a^{-1})_* e = a^{-1}$.

2.4. Для всякой окрестности $\mathcal{U}$ единицы существует открытая окрестность единицы V , содержащаяся в $\mathcal{U}$ и гомеоморфная открытому шару в $\mathbb{R}^n$ (соответственно в $\mathbb{C}^n$).

2.5. Всякая группа Ли является многообразием.

2.6. Так как G хаусдорфова, то достаточно показать, что связная компонента единицы G_e обладает счетной базой. Это так, поскольку G_e связна и поэтому порождается любой окрестностью единицы.

2.8. Это коммутативная топологическая группа, но не группа Ли, поскольку она не локально евклидова.

2.II. Группа матриц вида $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$,
где $A_1 \in GL(m, \mathbb{R})$, $A_2 \in GL(n-m, \mathbb{R})$.

2.I5. Подгруппа Ли матриц

$$z(A) = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}$$

может быть охарактеризована, как подгруппа матриц в $GL(2n, \mathbb{R})$, перестановочных с аффинором комплексной структуры

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad J^2 = -I.$$

2.I6. 1) $n(n-1)$; 2) $2n^2 - 2$; 3) n^2 ; 4) $n^2 - 1$; 5) n^2 ;
6) $n^2 - 1$; 7) $\frac{n(n-1)}{2}$.

2.I9. Использовать разложение $q = |q| \cdot q_0$, где q_0 - кватернион единичного модуля.

2.20. 1) Матрице $A \in U(n)$ поставить в соответствие элемент (Z, B) произведения $S \times SU(n)$ по формуле

$$Z = \det A, \quad B_{ii} = \frac{1}{Z} A_{ii}, \quad B_{ji} = A_{ji} \quad \text{при } j > i.$$

2) Доказательство аналогично.

3) Отображение $(A, B) \rightarrow Ae^B$ устанавливает диффеоморфизм $SU(2, \mathbb{R}) \times M$ на $SL(2, \mathbb{C})$, где M - пространство эрмитовых матриц с нулевым следом, линейно изоморфное $\mathbb{R}^3$.

2.21. Представить кватернионы комплексными 2-матрицами.

2.22. Отождествив кватернион с парой комплексных чисел и положив $q = x + yj$, рассмотреть комплексную реализацию группы G в пространстве $\mathbb{C}^{2m}$ как группу, сохраняющую одновременно симметричную эрмитову $x^1 \bar{y}^1 + \dots + x^{2m} \bar{y}^{2m}$ и кососимметричную $(x^{m+1} y^1 - x^1 y^{m+1}) + \dots + (x^{2m} y^m - x^m y^{2m})$ формы.

2.23. $\mathbb{R}_0$.

2.25. $G = \mathcal{O} \setminus \{ \lambda(1 \pm e) \}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.26. Группа $Sp(m, \mathbb{R})$ образована линейными операторами с матрицами $\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{bmatrix}$, где B и C - симметричные матрицы по-

рядка $m = n/2$; $\dim Sp(m, \mathbb{R}) = m(2m+1)$.

2.28. $A = A(\varphi) B(\varphi) C(\theta)$, где A, C — матрицы эллиптического, B — гиперболического вращения. Получим

$$A_1^1 = \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \operatorname{ch} \varphi \sin \theta, \quad A_2^1 = -\cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \operatorname{ch} \varphi \cos \theta,$$

$$A_3^1 = -\sin \varphi \operatorname{sh} \varphi,$$

$$A_1^2 = \sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \operatorname{ch} \varphi \sin \theta, \quad A_2^2 = -\sin \varphi \sin \theta + \cos \varphi \operatorname{ch} \varphi \cos \theta,$$

$$A_3^2 = \cos \varphi \operatorname{sh} \varphi,$$

$$A_1^3 = \operatorname{sh} \varphi \sin \theta, \quad A_2^3 = \operatorname{sh} \varphi \cos \theta, \quad A_3^3 = \operatorname{ch} \varphi.$$

2.29. а) Подгруппа Ли $D(n, \mathbb{R})$ диагональных матриц.

б) Подгруппа Ли матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где A, B — невырожденные блоки порядка m и $n-m$.

2.31. $GA(n)$ есть алгебраическая подгруппа в $PL(n, \mathbb{R})$, $\dim GA(n) = n(n+1)$.

2.34. Нет.

2.35. 1) $\dim SL(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$; 2) $\dim D_o(n, \mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$;

3) не подгруппа Ли.

2.38. 1) Подгруппа Ли; 2) подгруппа Ли; 3) не является подгруппой Ли.

2.40. Единица группы $e = (0, 0, 0)$; центр $Z = \{(0, 0, 2\pi k)\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.41. Подгруппа матриц $\begin{bmatrix} A & a \\ b^T & c \end{bmatrix}$, где $A^T A + \lambda b^T b = I_n$, $A^T a + \lambda b^T c = 0$, $a^T a + \lambda c^2 = \lambda$.

2.42. Изоморфизм устанавливается отображением

$$\begin{bmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z-w), \operatorname{Im}(z+w) \\ -\operatorname{Im}(z-w), \operatorname{Re}(z+w) \end{bmatrix}.$$

2.43. Использовать представление кватерниона в виде $q = z_1 + z_2 j$ и соответствующее представление операторов A комплексными матрицами.

2.44. См. задачу I.26.

2.45. $SO(3)$ изоморфна $SU(2) / \mathbb{Z}_2$, т.е. сфере S^3 , диаметрально противоположные точки которой отождествлены.

2.46. Группы $SO(n, \mathbb{R})$, $U(n)$, $SU(n)$ компактны, группа $O(n, \mathbb{C})$ некомпактна.

2.47. Обе группы некомпактны.

2.48. $Sp(m) \subset U(2m)$ и потому компактна, $\dim Sp(m) = 2m^2 + m$.

2.49. $\dim U(2) = 4$; $\dim SU(2) = 3$; $\dim SO(3, \mathbb{R}) = 3$;

$\dim SO(2, \mathbb{R}) = 1$; $\dim SO(2, \mathbb{R}) \times SO(2, \mathbb{R}) = 2$.

§ 3

3.1. 1) $so(n, \mathbb{C})$ – алгебра комплексных кососимметричных матриц;

2) $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2^* & u_3 \end{bmatrix}$, где u_1, u_3 – кососимметричные матрицы порядков p и q соответственно, u_2 – произвольная.

3.2. 1) $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2^* & u_3 \end{bmatrix}$, где u_1, u_3 – косоэрмитовы матрицы порядков p и q соответственно, u_2 – произвольная;

2) u – косоэрмитовы n – матрицы: $u + u^* = 0$;

3) то же и, кроме того, $\text{tr } u_1 + \text{tr } u_3 = 0$.

3.3. 1) $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2^T & -u_1^T \end{bmatrix}$, где u_i – комплексные или вещественные n – матрицы, u_2 и u_3 симметричны;

2) $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & -u_1^T \end{bmatrix}$, где u_i – комплексные n – матрицы, u_2, u_3 – симметричны.

3.5. Для любых $u, v \in \mathfrak{g}$ имеем $[u, v] = \lambda e_1$, где e_1 – постоянный вектор. Рассмотреть случаи $\lambda = 0, \lambda \neq 0$.

3.9. 1) нет; 2) да.

$$3.10. [e_\beta^\alpha, e_\tau^\beta] = \delta_\tau^\alpha e_\beta^\beta - \delta_\beta^\beta e_\tau^\alpha + \delta_\tau^\beta e_\beta^\alpha + \delta_\beta^\alpha e_\tau^\beta.$$

3.11. Алгебра матриц $\begin{bmatrix} u & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $u \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, которые можно рассматривать как пары (x, u) , образующие полупрямую сумму $\mathbb{R}^n \ltimes \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ с коммутатором $[(x, u), (y, v)] = (uy - vx, [u, v])$.

$$3.14. [e_1, e_2] = -2e_1, [e_1, e_3] = e_2, [e_2, e_3] = -2e_3.$$

Это алгебра типа VIII.

3.15. $[e_i, e_j] = \varepsilon_{ij}^\kappa e_\kappa$, где ε_{ij}^κ – тензор, кососимметричный по всем парам индексов с существенной компонентой $\varepsilon_{12}^3 = 1$. Это значит, что на самом деле алгебра $SU(2)$ является вещественной.

3.I6. Алгебра типа IX: $[e_1, e_2] = 2e_3$, $[e_2, e_3] = 2e_1$, $[e_3, e_1] = 2e_2$. Изоморфизм с алгеброй Ли чисто мнимых кватернионов задается соответствием

$$\varphi(i) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \varphi(j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi(k) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

3.I7. $[e_1, e_2] = -2e_3$, $[e_1, e_3] = -2e_2$, $[e_2, e_3] = 2e_1$.

3.I8. Из тождеств Якоби получаем условия: $a_{23}a_{15} - a_{13}a_{24} = 0$,
 $a_{12}a_{34} - a_{24}a_{16} + a_{14}a_{25} = 0$.

3.26. Нет.

3.27. $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = 0$, $[e_2, e_3] = 0$. Пучок 2-мерных идеалов $C_1 u^1 + C_2 u^2 = 0$ и 1-мерный идеал $u^1 = 0$, $u^2 = 0$, совпадающий с центром.

§ 4

4.I. Использовать существование базиса левоинвариантных векторных полей.

4.2. Нет, так как S^2 не параллелизуема.

4.6. $\varphi_*(\lambda i) = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.7. Подалгебра $\mathfrak{g}(\Phi)$ выделяется условием инвариантности $\Phi(ux, y) + \Phi(x, uy) = 0$ (см. § 3, пример 3).

4.8. Коммутативная алгебра $\mathbb{R}: [x, y] = 0$.

4.9. $\mathfrak{ga}(n)$ состоит из матриц $\begin{bmatrix} u & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $u \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, (см. задачу 3.II.).

4.I0. Алгебра $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ n -матриц с нулевым следом: $\text{tr } u = 0$.

4.II. 1) Алгебра Ли косоэрмитовых n -матриц $u^* + u = 0$;

2) Алгебра Ли косоэрмитовых матриц с нулевым следом $\text{tr } u = 0$.

4.I2. Алгебра Ли матриц $\begin{bmatrix} i\lambda & \bar{\alpha}^T \\ \alpha & u \end{bmatrix}$, где $u \in \mathfrak{u}(n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}^n$.

4.I3. $\mathfrak{o}(p, q)$ состоит из матриц $\begin{bmatrix} u & V \\ V^T & W \end{bmatrix}$, где $u \in \mathfrak{o}(p)$, $W \in \mathfrak{o}(q)$, V — произвольно.

4.I4. Трехмерная алгебра с векторным произведением, подалгебра в алгебре Ли $[H]$ с уравнением $x^0 = 1$.

4.I5. Симплектическая алгебра Ли (см. задачу 3.3.).

4.16. Состоит из матриц вида $\begin{bmatrix} U & -V \\ V & U \end{bmatrix}$, где U - косо-симметричная, V - симметричная m -матрицы. Ее размерность равна m^2 .

4.17. Алгебра Ли матриц $\begin{bmatrix} U & V & 0 \\ V & W & 0 \\ D & E & F \end{bmatrix}$, где U - кососимметричная p -матрица, W - кососимметричная q -матрица.

4.18. Алгебра Ли матриц $\begin{bmatrix} U & V & 0 \\ W & -U^T & 0 \\ D & E & F \end{bmatrix}$, где V, W - симметричные p -матрицы.

4.19. Имеется лишь одна существенная компонента структурного тензора: $C_{12}^1 = 1$.

$$4.20. f^1(a, b) = a^1 + b^1, f^2(a, b) = a^2 + b^2, f^3(a, b) = a^3 + b^3 + a^1 b^2.$$

Алгебра Ли $t_0(3, \mathbb{R})$ строго верхних треугольных матриц $U = \begin{bmatrix} 0 & u^1 & u^3 \\ 0 & 0 & u^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Структурные константы $C_{12}^3 = 1$ (остальные равны нулю).

$$4.21. 1) [e_1, e_2] = 0;$$

$$2) [e_1, e_2] = e_2.$$

4.22. $[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = e_3$ - это алгебра типа III.

4.23. $ga(n)$ есть алгебра Ли матриц вида $\begin{bmatrix} U & x \\ 0 & Q \end{bmatrix}$, где $U \in gl(n, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n$. Полагая $U = U_\beta^\alpha E_\alpha^\beta, x = x_\beta E_\beta$, получим следующие структурные уравнения:

$$[E_\beta^\alpha, E_\tau^\delta] = \delta_\beta^\delta E_\tau^\alpha - \delta_\tau^\alpha E_\beta^\delta,$$

$$[E_\beta^\alpha, E_\delta] = \delta_\delta^\alpha E_\beta, [E_\alpha, E_\beta] = 0$$

4.24. 1) C_0 ; 2) $E \setminus \lambda(1 \pm e), \lambda \neq 0$; 3) H_0 . Первые две группы коммутативны. Структурные уравнения алгебры Ли $[H]$ в базисе $\{1, i, j, k\}$: $[i, j] = 2k, [j, k] = 2i, [k, i] = 2j$.

4.25. Алгебра $O(2, 1)$ состоит из матриц вида $U = \begin{bmatrix} 0 & u^1 & u^3 \\ -u^1 & 0 & u^2 \\ u^3 & u^2 & 0 \end{bmatrix}$.

Принимая u^i за координаты, получим $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = -e_2, [e_2, e_3] = -e_1$. Это алгебра типа IX.

$$4.26. v^1(a) = v^1 \cos a^3 - v^2 \sin a^3, v^2(a) = v^1 \sin a^3 + v^2 \cos a^3,$$

$v^3(a) = v^3$, где $v = (v^1, v^2, v^3)$ - значение поля в единице. Структурные уравнения:

$$[e_1, e_2] = 0, [e_1, e_3] = -e_2, [e_2, e_3] = -e_1.$$

4.30. Рассмотреть инверсию $S: a \rightarrow a^{-1}$.

4.32. Если (x, u) , $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in gl(n, \mathbb{R})$ — начальное значение поля в единице $(0, I)$, то в элементе (a, A) его значение равно (Ax, Au) .

4.33. $e_1 = \partial_1$, $e_2 = \partial_2 + a^1 \partial_3$, $e_3 = \partial_3$;

$\theta^1 = da^1$, $\theta^2 = da^2$, $\theta^3 = -a^1 da^2 + da^3$.

4.35. Базис правоинвариантных полей: $\tilde{e}^1 = \partial_1 + a^2 \partial_3$, $\tilde{e}^2 = \partial_2$, $\tilde{e}^3 = \partial_3$.

4.36. Алгебра $[M]$ с коммутатором $[a, b] = ab - ba$. Левоинвариантные векторные поля имеют вид $v(a) = av$, где $a \in M_0$, $v \in M$.

4.37. Групповая операция $(a, b) \rightarrow ab^{-1}$ есть голоморфное отображение из $G \times G$ в G .

4.38. Обозначим через p_1 , p_2 проекции прямого произведения $G \times G$ на сомножители. Тогда формы $p_1^* \theta^i$ и $p_2^* \theta^i$ образуют кобазис на $G \times G$. 1-формы $\omega^i = p_1^* \theta^i - p_2^* \theta^i$ определяют вполне интегрируемое распределение ω и диагональ (a, a) является его интегральной подгруппой. Рассмотрим отображение $h: G \rightarrow G \times G$, $h(a) = (a, \varphi(a))$. Так как $h^* \omega^i = 0$, то в силу связности G график отображения h есть максимальное связное интегральное многообразие распределения ω . Так как θ^i левоинвариантны, то существуют элементы $b_1, b_2 \in G$ такие, что $b_1 a = b_2 \varphi(a)$, откуда $\varphi(a) = L_{b_1}^{-1} b_2 a$.

4.40. Задав псевдоскалярное произведение $(u, v)_e$ в $T_e(G)$, продолжить его до метрики на G левыми сдвигами: $(u(a), v(a)) = (L_{a^{-1}}^* u(e), L_{a^{-1}}^* v(e))_e$. В координатах $g_{ij}(a) = g_{km}(e) V_i^k(a) V_j^m(a)$.

4.42. Тождества Якоби.

4.43. При любом диффеоморфизме $\varphi: \varphi^*(\theta_1 \wedge \theta_2) = \varphi^* \theta_1 \wedge \varphi^* \theta_2$.

4.44. При всяком диффеоморфизме $\varphi: d\varphi^*(\omega) = \varphi^*(d\omega)$.

4.46. Структурные формы $\theta^\alpha = \tilde{A}_\beta^\alpha da^\beta$, $\theta_\beta^\alpha = \tilde{A}_\beta^\alpha dA_\beta^\alpha$.

Они удовлетворяют уравнениям: $d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \theta_\beta^\alpha$, $d\theta_\beta^\alpha = \theta_\beta^\gamma \wedge \theta_\gamma^\alpha$.

4.47. 1) $d\theta_\beta^\alpha = \theta_\beta^\gamma \wedge \theta_\gamma^\alpha$, $\theta_\alpha^\alpha = 0$;

2) $d\theta_\beta^\alpha = \theta_\beta^\gamma \wedge \theta_\gamma^\alpha$, $\theta_\beta^\alpha + \theta_\alpha^\beta = 0$.

4.48. Алгебра Ли образована матрицами $\begin{bmatrix} u & x \\ y^T & 0 \end{bmatrix}$, где u

кососимметрична, $x, y \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию $x + \lambda y = 0$.
 Левоинвариантные формы $\theta_\beta^\alpha, \theta^\alpha, \theta_\beta$ удовлетворяют условиям $\theta_\beta^\alpha + \theta_\alpha^\beta = 0, \theta^\alpha + \lambda \theta_\alpha = 0$ и структурным уравнениям

$$d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \theta_\beta^\alpha, d\theta_\beta^\alpha = \theta_\beta^\gamma \wedge \theta_\gamma^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta_\beta.$$

§ 5

5.1. Пусть $a(t)$ определена при $|t| < \varepsilon$ и удовлетворяет условию $a(t)a(s) = a(t+s)$ при $|t| + |s| < \varepsilon$. Для $t \in \mathbb{R}$ положить $a(t) = a(\frac{t}{n})^n$, где $|\frac{t}{n}| < \varepsilon$ и показать, что указанное условие выполняется при любых $t, s \in \mathbb{R}$.

5.3. В качестве базиса можно взять:
 $e_1(a) = (-a^2, a^1, a^4, -a^3), e_2(a) = (-a^3, -a^4, a^1, a^2), e_3(a) = (a^4, a^3, -a^2, a^1)$.
 Им соответствуют однопараметрические подгруппы

$$a_1(t) = e^{it}, a_2(t) = e^{jt}, a_3(t) = e^{kt}.$$

$$5.4. \exp(te_1) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \exp(te_2) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \exp(te_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5.5. e_1(t) = \begin{bmatrix} \cos \frac{t}{2} & i \sin \frac{t}{2} \\ i \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{bmatrix}, e_2(t) = \begin{bmatrix} \cos t/2 & -\sin t/2 \\ \sin t/2 & \cos t/2 \end{bmatrix}, e_3(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{bmatrix}.$$

$$5.6. a^2 = \kappa a^1 + 1, \text{ где } \kappa = v^2 / v^1.$$

$$5.7. \exp(tv) = \begin{bmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & -1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{bmatrix}.$$

$$5.8. a^1(t) = v^1 / v^2 (1 - e^{-v^2 t}), a^2(t) = v^2 t.$$

5.12. В канонических координатах 2-го рода произведение элементов группового ядра выражается по формуле $xy = (x^1 + y^1, \dots, x^2 + y^2)$.

5.14. Ввести в пространстве всех n -матриц $\mathbb{R}^{n^2}$ евклидову

метрику $|V|^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^n |V_\beta^\alpha|^2$, где $V = (V_\beta^\alpha)$. Используя свойства

$$|u| + |v| \leq |u| + |v|, |v^2|^\beta \leq |v|^2,$$

показать, что ряд $\exp V$ мажорируется сходящимся рядом $e^{|V|}$.

5.16. Так как $\det u$ и $\text{tr } u$ не изменяются при преобразо-

ваниях базиса, то для доказательства соотношения достаточно взять матрицу треугольного вида.

5.17. Рассмотреть случай $K = 1$ и затем применить индукцию.

5.18. Рассмотреть разложение по степеням $t \in [0, 1]$, $f(a \exp(tu)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c_k t^k$ и, используя предыдущую задачу, вычислить коэффициенты разложения.

5.19. Использовать формулу Тейлора (задача № 5.18.) для функции $f(\exp(tu) \cdot \exp(tv))$.

5.21 1) $e^{\lambda I_n}$; 2) $\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$.

5.23. Такой матрицы не существует.

5.24. Однопараметрическая группа вращений

$A(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ вокруг оси z .

5.25. $\exp u = \begin{bmatrix} e^{u_n} & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^n$ — связная компонента аффинной группы $GA(n)$.

5.26. $\exp u = e^{\lambda} A$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{n!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

5.27. Пусть, например, $u^T = -u$. Тогда $(\exp u)^T = \exp(-u) = (\exp u)^{-1}$. Поэтому $\exp u$ ортогональна.

5.28. Положим $\alpha = \sqrt{|\det u|}$, $u \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

1) $\exp u = \cos \alpha \cdot I + \frac{\sin \alpha}{\alpha} u$, если $\det u > 0$,

2) $\exp u = \cosh \alpha \cdot I + \frac{\sinh \alpha}{\alpha} u$, если $\det u < 0$,

3) $\exp u = I + u$, если $\det u = 0$.

5.31. Использовать форму Жордана произвольной матрицы $A \in GL(n, \mathbb{C})$. Свести задачу к рассмотрению одной жордановой клетки $W = \lambda I + \varepsilon$, где $\varepsilon^n = 0$. Тогда

$\lambda I (I + \frac{1}{\lambda} \varepsilon) = \lambda I \cdot N$. Показать, что сомножители допускают представление в виде матричной экспоненты: $\lambda I = e^u$, $N = e^V$.

5.32. Всякую унитарную матрицу $A \in U(n)$ унитарным преобразованием можно привести к диагональному виду. Поэтому

$A = B \operatorname{diag}(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n}) B^{-1}$. Положим $H = B \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) B^{-1}$.

Это эрмитова симметричная матрица. Тогда $A = \exp(iH)$.

5.33. Рассмотреть левоинвариантную почти комплексную структуру на G и доказать ее интегрируемость.

5.34. Элемент $a = \exp v$ имеет координаты $a^1 = \frac{1}{v^3}(v^1 \sin v^3 + v^2 \cos v^3 - v^2)$, $a^2 = \frac{1}{v^3}(-v^1 \cos v^3 + v^2 \sin v^3 + v^1)$, $a^3 = v^3$.

Экспоненциал не определен при $v^3 = 0$ и теряет однозначность при $v^3 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.35. $\theta^1 = dx^1$, $\theta^2 = dx^2$, $\theta^3 = -x^1 dx^2 + dx^3$,
 $d\theta^1 = 0$, $d\theta^2 = 0$, $d\theta^3 = -\theta^1 \wedge \theta^2$.

5.36. $f^1 = a^1 + b^1$, $f^2 = a^2 + b^2$ — аддитивная группа $\mathbb{R}^2$.

5.37. $f^1 = a^1 + b^1$, $f^2 = a^2 + b^2$, $f^3 = a^3 + b^3 + a^1 a^2$.

5.38. $f^1 = a^1 b^1$, $f^2 = a^2 b^1 + b^2$.

5.39. $f^1 = a^1 + \frac{b^1}{a^3} + a^2 \ln b^3$, $f^2 = a^2 + \frac{b^2}{a^3}$, $f^3 = a^3 b^3$.

5.40. $d\theta^1 = 0$, $d\theta^2 = -\theta^1 \wedge \theta^2$, $d\theta^3 = -\theta^1 \wedge \theta^2 - \theta^1 \wedge \theta^3$,

$f^1(a, b) = a^1 b^1$, $f^2(a, b) = \frac{1}{b^1} a^2 + b^2$, $f^3(a, b) = \frac{1}{b^1}(a^3 - a^2 \ln b^1 + b^3)$.

5.41. 1) $O(n, \mathbb{R})$; 2) $T(n, \mathbb{R})$; 3) $D(n, \mathbb{R})$.

§ 6

6.2. Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ группы H есть подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$, определяемая условием $\varphi_{*1} u = \varphi_{*2} u$.

6.3. $\varphi(a, b) = \varphi_1(a) \varphi_2(b)$, где $a \in G_1$, $b \in G_2$.

6.5. Условие $\ker \varphi \in H$ используется при доказательстве замкнутости группы $H' = \varphi(H)$.

6.9. Ядро гомоморфизма $\varphi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$.

6.10. Для любого $u \in \mathfrak{g}$ отображение $t \rightarrow \varphi(\exp t u)$ есть аналитический гомоморфизм $\mathbb{R}$ в G' . Положив $u' = \varphi_*(e) u$, будем иметь $\varphi(\exp t u) = \exp t u'$ для любого $t \in \mathbb{R}$. При $t = 1$ получим искомое равенство.

6.13. Гомоморфизм "на" с ядром S^1 .

6.14. Гомоморфизм "на" с ядром $\{2\pi k i\}$.

6.15. Образ гомоморфизма $SO(2)$, ядро $\{2\pi k\}$.

6.16. Гомоморфизм в $D(n, \mathbb{C})$ с ядром $\{2\pi k_1, \dots, 2\pi k_n\}$, $k_i \in \mathbb{Z}$.

6.17. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ - гомоморфизмы, φ_3 - нет.

6.18. $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.

6.19. Подгруппа гомотетий: $x' = \lambda x, y' = \lambda y, \lambda \neq 0$.

6.20. $\text{Ker } \varphi = \mathbb{Z}_2, \text{Im } \varphi = SO(3)$.

6.21. 1) Ось Ox^2 ; 2) $\mathbb{R}^{n-k}: \{0, \dots, 0, x^{k+1}, \dots, x^n\}$; 3) $\mathbb{Z}$, локальный изоморфизм; 4) $\mathbb{Z}^n$, локальный изоморфизм.

6.22. 1) $\varphi_*(x) = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\varphi_*(x) = ix$; 3) $\varphi_*(u) = tz u$; 4) $\varphi_*(x) = Ax$; 5) $\varphi_*(u)x = u^T x + xu$.

6.23. 1) автоморфизм; 2) $\rightarrow$ 4) антиавтоморфизмы; 5) не является автоморфизмом.

6.24. 1) $x' = ax$, где $a \in \mathbb{R}_0$; 2) $z' = z^n, z \in S^1, n \in \mathbb{Z}$.

6.26. Алгебра Ли дифференцирований алгебры $\mathcal{O}_X$:

$$D(x, y) = D(x)y + xD(y).$$

6.28. Так как $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, и $\text{Aut } \mathbb{R}^n = GL(n, \mathbb{R})$, то автоморфизмами T^n являются автоморфизмы $\mathbb{R}^n$, сохраняющие целочисленную решетку $\mathbb{Z}^n$. Последние задаются матрицами с целыми элементами и определителем ± 1 и, следовательно, образуют дискретную подгруппу в $GL(n, \mathbb{R})$.

6.30. Группа 2-матриц вида

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \neq 0.$$

6.31. Группа 3-матриц вида

$$A = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & 0 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{vmatrix} = 1.$$

6.33. Если $(a, A) \in GA(n)$, то $a' = -B A B^{-1} b + B a + b, \quad A' = B A B^{-1}$.

6.35. Указанные группы есть подгруппы в $SL(2, \mathbb{C})$, сопряженные с помощью внутреннего автоморфизма, определяемого матрицей

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 7

7.3. $\{n + \alpha\}$, где $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha < 1$ – фиксированное число.

7.4. Положим $a = z + wj$. Для $q \in S^1$ получим $aS^1 = \{zq + w\bar{q}j\}$, $S^1a = \{qz + qwj\}$. Так как левые и правые сдвиги на S^3 есть вращения, то это большие круги 3-сферы, однозначно определяемые комплексными числами $\lambda = \frac{\bar{z}}{w}$ или $\mu = \frac{z}{w}$ соответственно.

7.5. Подмножества матриц с одним и тем же определителем.

7.9. а) $\mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{R}^{n-m}$; в) S^1 ; г) S^1 ; д) $\mathbb{R}_+$; е) S^1 ; ж) $\mathbb{C}_0$.

7.10. $\mathbb{R}^n / V^k$ изоморфна $\mathbb{R}^{n-k}$.

7.11. $\mathbb{Z}_2$.

7.12. $K \in \mathbb{Z}$ $\varphi = SU(n)$. Отсюда вытекает указанный изоморфизм.

7.13. $SO(3)$.

7.14. а) $\mathbb{R}_0$; б) $\mathbb{Z}_2$; в) $\mathbb{C}_0$; г) S^1 .

7.15. Использовать биективное соответствие

$$x \in E_{3,1}^4 \rightarrow A = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix}$$

между векторами пространства Минковского и эрмитовыми 2-матрицами и то, что преобразование $A' = B A B_4^*$, $B \in SL(2, \mathbb{C})$ индуцирует преобразование Лоренца в $E_{3,1}$.

7.16. $\mathbb{C}_0$.

7.17. $GL(n, \mathbb{R})$.

7.18. $0 \rightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi_*} \mathfrak{ga}(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi_*} \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow 0$.

7.19. Примером является группа $G = S^1$ с нормальным делителем $N = \mathbb{Z}_k$ ($k = 2, 3, \dots$). Изоморфизм $S^1 / \mathbb{Z}_k \cong S^1$ задается отображением $\varphi(z) = z^k$.

7.20. Пусть $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m$ – система линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^n$ ($0 \leq k+m \leq n$). Тогда множество векторов вида $a = x^\alpha u_\alpha + y^\beta v_\beta$ ($\alpha = 1, \dots, k; \beta = 1, \dots, m$), где x^α – целые, y^β – произвольные вещественные числа, есть замкнутая подгруппа (а в силу коммутативности и нормальный делитель) в $\mathbb{R}^n$, изоморфная $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^m$. Показать, что всякая

замкнутая подгруппа в $\mathbb{R}^n$ имеет такой вид. Доказательство провести индукцией по n (см. пример 7, § I).

7.23. Использовать результат задачи 7.20.

7.25. $\text{Ker } \rho_1 \cong H$, $\text{Ker } \rho_2 \cong G$.

7.28. Связная компонента единицы $e \in G$ изоморфна H . Другие связные компоненты топологически эквивалентны H и могут быть занумерованы с помощью элементов группы K .

7.31. Да.

7.32. Да.

7.35. Использовать преобразование вида $x' = \rho x q^{-1}$ в пространстве кватернионов с вещественными, либо комплексными компонентами.

7.36. 1) Использовать задачу 7.35.; 2) Аналогичным образом использовать кватернионы $q = x^0 + x^1 i + x^2 e + x^3 f$, $i^2 = -1$, $e^2 = f^2 = 1$, $ef = -i$.

$$7.37. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}^{-1} \end{bmatrix}.$$

7.38. Полупрямое произведение подгруппы $Z = W = 0$ и нормального делителя $\alpha = \beta = 0$.

7.40. Нет, так как N — нормальный делитель, но H не является нормальным делителем.

§ 8

8.1. φ_2 эквивалентно φ_4 , φ_3 эквивалентно φ_5 .

$$8.2. \quad \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} \in SO(2).$$

8.3. Представления локально изоморфны, но не изоморфны.

8.4. Проверить, что функции $\varphi_i(a_i) = \varphi(e_1, \dots, a_i, \dots, e_k)$ задают одномерное представление групп G_i .

8.5. Учитывая, что $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и используя задачу 8.4., получим $\varphi(z) = e^{\rho z + q \bar{z}}$, $\rho, q \in \mathbb{C}$. Оно унитарно, если $q = -\bar{\rho}$.

8.6. Используя пример № 2 и накладывая условия периодичности $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha + 2\pi)$, получим $\varphi(z) = e^{in\alpha}$, $\alpha = \alpha z q z$, $n \in \mathbb{Z}$.

8.7. Используя результат задачи 8.6 и изоморфизм групп T^1 и S^1 , получим $\varphi(x) = e^{2\pi i n x}$, $n \in \mathbb{Z}$.

8.8. а) Используя изоморфизм $\ell n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_0$, получим $\varphi(x) = x^\kappa$, $\kappa \in \mathbb{C}$. Оно унитарно, если κ — чисто мнимое.

б) Представив $x \in \mathbb{R}_-$ в виде $x = -|x|$ и учитывая предыдущий результат, получим $\varphi(x) = \pm |x|^\kappa$, $x \in \mathbb{R}_0$, $\kappa \in \mathbb{C}$. Оно унитарно, если число κ чисто мнимое.

в) Учитывая, что $\mathbb{C}_0 \cong S^1 \times \mathbb{R}_+$, получим $\varphi(z) = |z|^\kappa e^{i n \alpha}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha = \arg z$.

8.9. 1) $\varphi(x^1, \dots, x^n) = e^x$, где $x = \kappa_\alpha x^\alpha$, $(\alpha = 1, \dots, n)$, $\kappa_\alpha \in \mathbb{C}$. Оно унитарно, если коэффициенты κ_i чисто мнимы.

2) $\varphi(z^1, \dots, z^n) = e^z$, где $z = p_\alpha z^\alpha + q_\alpha \bar{z}^\alpha$, $p_\alpha, q_\alpha \in \mathbb{C}$. Оно унитарно, если $q_\alpha = -\bar{p}_\alpha$.

3) $\varphi(z^1, \dots, z^n) = |z^1|^{\kappa_1} \dots |z^n|^{\kappa_n} e^{ix}$, где $x = m_\alpha \arg z^\alpha$, $\kappa_\alpha \in \mathbb{C}$, $m_\alpha \in \mathbb{Z}$. Представление унитарно, если числа κ_α чисто мнимы.

4) $\varphi(x^1, \dots, x^n) = e^{2\pi i x}$, $x = m_\alpha x^\alpha$, $m_\alpha \in \mathbb{Z}$. Представление всегда унитарно.

8.10. Подпространства $\mathbb{R}_\kappa(x) \subset \mathbb{R}_n(x)$ многочленов степени $0 \leq \kappa \leq n$.

8.11. Многочлены $e_\kappa = (z^1)^\kappa (z^2)^{n-\kappa}$, где $\kappa = 0, 1, \dots, n$, образуют базис пространства V . Для доказательства неприводимости достаточно показать, что всякое e_κ действием группы может быть преобразовано в $e_n = (z^1)^n$.

8.12. Вполне приводимо.

8.14. Тогда и только тогда, когда матрица A приводится к диагональному виду.

8.15. Если $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, то

$$p(A) = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & bc+ad & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{bmatrix}.$$

8.16. Определитель $\det X = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ инвариантен относительно представления.

8.17. Если $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$, то

$$p(A) = \begin{bmatrix} a\bar{a} - b\bar{b} & a\bar{b} + \bar{a}b & i(a\bar{b} - \bar{a}b) \\ -2\operatorname{Re}(ab) & \operatorname{Re}(a^2 - b^2) & -\operatorname{Im}(a^2 + b^2) \\ -2\operatorname{Im}(ab) & \operatorname{Im}(a^2 - b^2) & \operatorname{Re}(a^2 + b^2) \end{bmatrix}.$$

8.19. Подпространства симметричных и кососимметричных билинейных форм.

8.20. (I) – (4) представления, (5) – (6) нет.

8.21. Подпространства $M_i \subset M(n, K)$ n -матриц, у которых все столбцы, кроме i -го, нулевые.

8.22. $M(n, K) = K \cdot I \oplus \mathfrak{sl}(n, K)$ – прямая сумма подпространства скалярных n -матриц и подпространства матриц с нулевым следом.

8.23. $(\varphi_*(u) \Phi)(x, y) = \Phi(ux, y) + \Phi(x, uy)$.

8.25. Пусть $a(t) \in G$ – путь, соединяющий единицу группы с точкой $a = a(1)$. Тогда $A(t) = \varphi(a(t))$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dA}{dt} = A(t)C(t), \text{ где } C(t) = \varphi_* \circ L_{a(t)}^{-1} \frac{da}{dt}.$$

Начальное условие $A(0) = I$ определяет единственное решение $A(t)$. При этом из $C(t)L \subset L$ вытекает $A(t)L \subset L$.

8.27. Рассмотреть образ $\text{Im } A \subset V$ и ядро $\text{Ker } A \subset L$ отображения A и использовать неприводимость представлений.

8.28. Пусть λ – собственное значение оператора A . Рассмотреть вырожденный оператор $A' = A - \lambda I$, также коммутирующий с представлением, и использовать лемму Шура (задача 8.27).

8.29. Для $\forall a, x \in G$ имеем $\varphi(a)\varphi(x) = \varphi(x)\varphi(a)$. Далее использовать лемму Шура (задача 8.27).

8.30. Рассмотреть комплексификацию и применить лемму Шура (задача 8.27).

8.34. Равенство $\varphi(v)\varphi(u) = \varphi([v, u]) + \varphi(u)\varphi(v)$ применить для $u \in \mathfrak{g}$, $v \in \mathfrak{h}$, $x \in L$.

8.35. Использовать равенство $\varphi(u)\varphi(v) = [\varphi(u), \varphi(v)] + \varphi(v)\varphi(u)$.

8.37. Если L инвариантно, то $\varphi Rx \in L$, откуда $R\varphi R = \varphi R$ и, следовательно, $R\varphi^* R = R\varphi^*$. В силу унитарности представления это эквивалентно $R\varphi(a^{-1})R = R\varphi(a^{-1})$. Положив $\mathfrak{b} = a^{-1}$, имеем $R\varphi(\mathfrak{b})R = \varphi(\mathfrak{b})R = R\varphi(\mathfrak{b})$ для каждого $\mathfrak{b} \in G$. Обратно, если $R\varphi = \varphi R$, то при $x \in L$ получаем $\varphi x = \varphi Rx = R\varphi x \in L$.

8.38. Выбрать в пространстве представления V положительно определенную эрмитову форму $(x, y)_0$ и показать, что $(x, y) = \int_G (\varphi(a)x, \varphi(a)y)_0 da$ есть φ -инвариантное скалярное произведение на V .

8.40. Использовать результат задачи 8.38.

8.41. Необходимость следует из леммы Шура. Обратно, если всякий оператор, коммутирующий с φ , имеет вид λI , то для проектора P , коммутирующего с представлением, имеем (задача 8.37.) либо $P = I$, либо $P = 0$.

8.42. Всякая конечная группа компактна.

8.43. Использовать задачу 8.40.

8.44. Компактная группа Ли обладает точным линейным представлением. С другой стороны, всякое представление компактной группы эквивалентно унитарному.

8.45. Если $\dim V = n$, то $\dim S^p(V) = C_{n+p-1}^p$, $\dim \Lambda^p(V) = C_n^p$.

8.46. $\varphi_\alpha^\beta(s) = \delta_{s(\alpha)}^\beta$.

8.48. Всякая матрица $A \in SU(2)$ унитарным преобразованием может быть приведена к виду

$$A_0 = B A B^{-1} = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}.$$

При этом $\chi(A) = \chi(A_0)$. Получаем

$\varphi(A_0)e_\kappa = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 1 \\ z & z \end{pmatrix}^\kappa \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & z \\ z & z \end{pmatrix}^{n-\kappa} = e^{i(2\kappa-n)\theta} e_\kappa$
и, следовательно, $\chi(A) = \sum_{\kappa=0}^n e^{i(2\kappa-n)\theta}$. Суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$\chi(A) = \frac{e^{i(n-1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}.$$

§ 9

9.2. Если G связна, то присоединенное представление группы точное.

9.3. $u'^0 = u^0$, $u'^\alpha = au^\alpha + b^\alpha$, ($a \neq 0$).

9.4. $Aut(G)$ совпадает с присоединенной группой и изоморфно $SO(n, \mathbb{R})$.

9.5. Группа $SO(3, \mathbb{R})$, заданная матрицами

$$\varphi(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + \bar{a}^2 - \bar{b}^2) & \frac{i}{2}(-a^2 + b^2 + \bar{a}^2 - \bar{b}^2) & a\bar{b} + \bar{a}b \\ \frac{i}{2}(-a^2 - b^2 + \bar{a}^2 + \bar{b}^2) & \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + \bar{a}^2 + \bar{b}^2) & i(\bar{a}b - a\bar{b}) \\ -(\alpha b + \bar{\alpha} \bar{b}) & -i(\alpha b - \bar{\alpha} \bar{b}) & \alpha \bar{\alpha} - b \bar{b} \end{bmatrix}.$$

9.6. $x'^1 = x^1$, $x'^2 = x^2$, $x'^3 = -a^2 x^1 + a^1 x^2 + x^3$.

9.7. Это следует из инвариантности структурного тензора.

9.8. Пусть $v = v^\kappa e_\kappa$ - решение системы. Надо показать, что коммутаторы $[u, v]$ тоже удовлетворяют системе при любом выборе u . Последнее следует из того, что преобразование $v \rightarrow v + [u, v]t$ есть инфинитезимальное преобразование присоединенной группы. Поэтому координаты векторов $v + [u, v]t$ удовлетворяют той же системе.

9.9. $ad(u)e_j = c_{ij}^\kappa u^i e_\kappa$. Следовательно, $ad(u)_j^i = c_{ij}^\kappa u^i$.

9.10. Для коммутативной алгебры Ли $ad(g) = 0$. Для некоммутативной $ad(u) = \begin{bmatrix} -u^2 & u^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Эта алгебра изоморфна заданной.

9.11. $ad(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -u^2 & u^1 & 0 \end{bmatrix}$.

9.12. Операторы $ad(u)$ кососимметричны относительно евклидовой метрики на $SU(2)$: $\det v = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$ и в указанном базисе представляются матрицами:

$$(ad(u)) = 2 \begin{bmatrix} 0 & -u^3 & u^2 \\ u^3 & 0 & -u^1 \\ -u^2 & u^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9.13. Преобразования $V \rightarrow AVA^{-1}$, $A \in SL(2, \mathbb{R})$ сохраняют псевдоевклидову метрику $\det V = (V^1)^2 - (V^2)^2 - (V^3)^2$. Операторы $ad(u)$ в указанном базисе представляются матрицами

$$ad(u) = 2 \begin{bmatrix} 0 & u^3 & -u^2 \\ u^3 & 0 & -u^1 \\ -u^2 & u^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9.14. $ad(u) = \begin{bmatrix} 0 & -u^3 & u^2 \\ u^3 & 0 & -u^1 \\ -u^2 & u^1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$9.15. ad(u)E_{\beta}^{\alpha} = (\delta_{\beta}^{\alpha} u_{\beta}^{\tau} - \delta_{\beta}^{\tau} u_{\beta}^{\alpha}) E_{\tau}^{\beta}.$$

$$9.16. ad(u)E_{\beta}^{\alpha} = (\delta_{\beta}^{\alpha} u_{\beta}^{\tau} - \delta_{\beta}^{\tau} u_{\beta}^{\alpha}) E_{\tau}^{\beta}, \text{ где } \alpha < \beta, \beta < \tau.$$

9.17. Используя результаты примера I § 3, получим:

$$ad(u)E_{\beta}^{\alpha} = u_{\beta}^{\alpha} E_{\beta}^{\alpha} - u_{\beta}^{\alpha} E_{\beta}^{\alpha}, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$ad(u)E_{\alpha}^{\alpha} = u_{\alpha}^{\gamma} E_{\gamma}^{\alpha} - u_{\gamma}^{\alpha} E_{\alpha}^{\gamma} - u_{\alpha}^{\gamma} E_{\gamma}^{\alpha} + u_{\gamma}^{\alpha} E_{\alpha}^{\gamma},$$

где $\gamma = 1, \dots, n-1$, а по α нет суммирования.

$$9.18. ad[u, v] = ad(u) \circ ad(v) - ad(v) \circ ad(u).$$

9.19. $ad(g) \subset D(g)$ в силу тождества Якоби. Это идеал, так как $[D, ad(u)] = ad(Du)$.

9.20. $\alpha x \alpha^{-1} = R_{\alpha}^{-1} \circ L_{\alpha} x$. Перейти к дифференциалу и учесть левинвариантность поля u .

$$9.22. \text{Заметить, что } ad(u) = Ad_{*}(u) = \frac{d}{dt} Ad(\exp(tu))|_{t=0}.$$

9.23. Задачу 6.10 применить к гомоморфизму $Ad: G \rightarrow Ad(G)$.

§ 10

10.1. Естественный гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow G/Kez \varphi$ в силу дискретности ядра является групповым накрытием. Равенство $\varphi(G) = G'$ вытекает из совпадения размерностей и связности группы G' .

10.2. Если φ — накрытие, то φ_{*} инъективно и сюръективно. Обратно, если φ_{*} — изоморфизм, то $Kez \varphi$ является дискретным нормальным делителем в G . $\exists$ окрестность единицы $V \subset G$ такая, что $(V^{-1}V) \cap Kez \varphi = \{e\}$. Тогда ограничение $\varphi|_V: V \rightarrow \varphi(V)$ есть диффеоморфизм.

10.3. Пусть $e \in V$ — окрестность единицы группы G , не содержащая других элементов из $\mathcal{N}$. Существует окрестность $U \ni e$ такая, что $UU^{-1} \subset V$. Показать, что ограничение естественного отображения ω на U является изоморфизмом.

10.4. Так как естественные отображения $\omega: G \rightarrow G/H$ и $\omega_e: G \rightarrow G/H_e$ непрерывны и открыты, а $\rho \circ \omega_e = \omega$, то ρ также непрерывно и открыто. Рассмотрим теперь связную окрестность единицы V группы G такую, что $V^{-1}V \subset H_e$. Показать, что для любой точки $\omega(a) = aH \in G/H$ ее окрестность

$V(a) = \omega(aV)$ накрывается отображением ρ . Для этого выбрать в связных компонентах подгруппы H по представителю δ_a и рассмотреть в G/H_e открытые связные множества $\omega_e(aV\delta_a)$. Они не пересекаются, исчерпывают все $\rho^{-1}V(a)$ и гомеоморфны $V(a)$.

10.5. Рассмотреть путь γ из элемента a' в a и для $[\delta] \in \pi(G, a)$ положить $[\delta'] = \varphi([\delta])$, где $\delta' = \gamma \delta \gamma^{-1}$. Показать, что $\varphi: \pi(G, a) \rightarrow \pi(G, a')$ есть искомым изоморфизм.

10.6. Рассмотреть пути $\delta(t)$ и $\tau(t)$, соединяющие единицу с элементами $a = \delta(1)$, $b = \tau(1)$ и показать, что имеет место гомотопия $\delta \circ (\alpha \tau) \sim \tau \circ (\delta b)$. Применить результат к замкнутым путям, когда $a = b = e$.

10.8. Петли δ_i в единицах групп G_i порождают петлю $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ в единице G и обратно, всякое δ может быть представлено в таком виде. Умножение в $\pi(G)$ определяется формулой $[\delta][\tau] = ([\delta_1, \tau_1], \dots, [\delta_n, \tau_n])$.

10.9. Использовать результат задачи 10.8.

10.10. $SO(2, \mathbb{R})$ гомеоморфна окружности. Фундаментальная группа $\pi(SO(2, \mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$.

10.11. $\mathbb{R}^n; \pi(T^n) = \mathbb{Z}^n$.

10.12. Группы $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ односвязны, $\mathbb{R}_o$ состоит из 2-х связных компонент, $\mathbb{C}_o$ связна, но не односвязна.

10.13. Рассмотреть отображение φ , которое унитарной матрице ставит в соответствие собственное ортогональное преобразование $\varphi(A)X = AXA^*$ в пространстве чистых кватернионов. Последние представить в виде

$$X = \begin{bmatrix} ix^3 & , & x^1 + ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & , & -ix^3 \end{bmatrix}.$$

10.14. Если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$, то

$$a = \cos \frac{\theta}{2} \exp\left(\frac{\varphi + \psi}{2}i\right); \quad b = i \sin \frac{\theta}{2} \exp\left(\frac{\varphi - \psi}{2}i\right);$$

$$c = i \sin \frac{\theta}{2} \exp\left(\frac{\varphi - \psi}{2}i\right); \quad d = \cos \frac{\theta}{2} \exp\left(-\frac{\varphi + \psi}{2}i\right).$$

10.15. Группа $SU(2)$ диффеоморфна сфере S^3 ; группа $SL(2, \mathbb{C})$ диффеоморфна $SU(2) \times \mathbb{R}^3$ (см. задачу 2.20).

10.16. Рассматривая универсальное накрытие $S^3 \rightarrow SO(3)$, получим $\pi(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$.

10.17. Проверить, что отображение φ , которое матрице

$A \in SL(n, \mathbb{C})$ ставит в соответствие преобразование $X \rightarrow AXA^*$ в пространстве эрмитовых 2-матриц

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + x^2 i \\ -x^1 + x^2 i & x^0 - x^3 \end{pmatrix},$$

является гомоморфизмом на группу Лоренца $SO(3, 1)$ с ядром $\mathbb{Z}_2$. Таким образом, псевдоевклидовы вращения изображаются круговыми преобразованиями плоскости комплексного переменного (конформная интерпретация Пуанкаре).

10.18. Рассмотреть представление из задачи 8.16, суженное на подгруппу $SL(2, \mathbb{R})$.

10.19.

$$\varphi: \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(a^2 + b^2), -\operatorname{Im}(a^2 - b^2), 2\operatorname{Re}(ab) \\ \operatorname{Im}(a^2 + b^2), \operatorname{Re}(a^2 - b^2), 2\operatorname{Im}(ab) \\ 2\operatorname{Re}(a\bar{b}), -2\operatorname{Im}(a\bar{b}), a\bar{a} + b\bar{b} \end{bmatrix}.$$

10.20. Каждая пара кватернионов единичного модуля $p, q \in S^3$ порождает ортогональное преобразование $x' = \frac{p}{|p|} x \frac{\bar{q}}{|q|}$ в пространстве всех кватернионов $\mathbb{H}: |x'| = |p||x||\bar{q}| = |x|$. Остается показать, что полученное отображение является гомоморфизмом с ядром $\{\pm I\}$.

10.21. Матрице $A \in SL(2, \mathbb{C})$ поставить в соответствие ортогональное преобразование $\varphi(A)X = AXA^{-1}$ в пространстве чистых кватернионов с комплексными компонентами.

10.24. Рассмотреть отображение, которое каждой матрице $A \in U(n)$ ставит в соответствие пару (b, c) , где $b = \det A$,

$$c_\beta^1 = \frac{\alpha_\beta}{\det A}, \quad c_\beta^\alpha = \alpha_\beta^\alpha \quad \text{при } \alpha > 1. \text{ Аналогично для группы } O(n).$$

10.25. $U(n)$ гомеоморфна $T^1 \times SU(n)$. Отсюда $\pi(U(n)) \cong \mathbb{Z}$.

10.26. $SO(n)/SO(n-1) \approx S^{n-1}$ и поэтому при $n \geq 3$ односвязна. Отсюда следует, что фундаментальная группа $\pi(SO(n, \mathbb{R}))$ при $n \geq 3$ является факторгруппой группы $\pi(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$. Так как $SO(n, \mathbb{R})$ не односвязна, то $\pi(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$.

10.27. Утверждение очевидно для односвязных групп Ли. В случае связной группы рассмотреть универсальную накрывающую группу $\tilde{G}$ и показать, что естественное отображение $\operatorname{Aut}(G) \rightarrow \operatorname{Aut}(\tilde{G})$ инъективно, а его образ есть подгруппа Ли в $\operatorname{Aut}(\tilde{G})$.

10.28. Универсальной накрывающей группой для G является

$\mathbb{R}^n$. Поэтому G изоморфна $\mathbb{R}^n / \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — дискретный нормальный делитель. Использовать результаты задачи 7.20.

10.29. Использовать задачу 10.28.

§ II

$$\text{II.1. } \Phi_{ij}(a) = \Phi_{km} V_i^k(a) V_j^m(a).$$

II.2. В зависимости от ранга квадратичной формы на идеале $\{e_i\}$:

$$(\Phi_{ij}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 z \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad (\Phi_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $z \neq 0$.

$$\text{II.3. 1) } ds^2 = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 da^2 + \varepsilon_2 z^2 d\theta^2);$$

$$2) ds^2 = \frac{2}{a^2} da d\theta.$$

II.6. Использовать формулу $ad \varphi(u) = \varphi \circ ad(u) \circ \varphi^{-1}$.

II.7. Учесть, что следы операторов $[A, B]C$ и $A[B, C]$ совпадают.

$$\text{II.8. Евклидова метрика } B(u, v) = -8(u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3).$$

$$\text{II.9. } B(u, v) = 2(u^1 v^1 + u^2 v^2 - u^3 v^3).$$

II.10. Псевдоевклидова метрика

$$B(u, v) = 8(-u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3).$$

II.12. Ограничение формы Киллинга алгебры $gl(n, \mathbb{R})$ из примера № I на подалгебру $sl(n)$ дает $B(u, v) = 2ntz(uv)$.

$$\text{II.13. } B(u, v) = (n-1)tz(uv),$$

$$\text{II.14. } B(u, v) = 2(n+1)tz(uv).$$

II.15. $h^\perp$ состоит из матриц $\begin{bmatrix} 0 & -A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$, где $A(k, m)$ — матрица.

II.17. Пусть A — линейный оператор в $\mathfrak{g}$, однозначно определенный формулой $\Phi(u, v) = B(Au, v)$. Показать, что A переставочен с $ad(\mathfrak{g})$ и для любого u и, значит скалярен: $A = \lambda I$.

II.18. Пусть $a(t)$ — однопараметрическая подгруппа в G , $a(0) = e$ и $a = a(1)$. Рассмотрим точку $C = a(1/2)$. Инволютивное преобразование $\varphi(x) = cx^{-1}c$ на G есть движение метрики, для которого C является неподвижной изолированной точкой.

При этом $\varphi(a) = e$ и $\varphi(e) = a$. Если a достаточно близка к e , то единственная геодезическая $[e, a]$ преобразуется в себя и проходит через c . Повторяя рассуждения, покажем, что геодезическая содержит точки $a \left(\frac{m}{2^n} \right)$ при любом $m \in \mathbb{Z}$. В силу непрерывности отсюда следует, что $a(t)$ — геодезическая.

II.19. Использовать задачу II.18 и применить левые сдвиги.

II.20. Так как $Ad(G) \subset O(q)$, то необходимость очевидна. Для доказательства достаточности взять любое скалярное произведение (u, v) на q и положить $(u, v) = \int_{a \in G} (L_a u, L_a v) d\omega$, где $\omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k$ — левоинвариантная форма объема на H .

II.22. Учесть, что $g_{ij} = C_{is}^k C_{jk}^s$ и использовать тождество Якоби.

II.23. Следствие задачи II.20.

II.24. Всякая компактная группа Ли обладает инвариантной римановой метрикой. Тогда через любые две точки G , в частности, точки e и a , можно провести хотя бы одну геодезическую γ . Далее использовать задачу II.18.

II.27. $\Gamma_{12}^1 = 1$, остальные компоненты равны нулю.

II.28. В декартовых координатах все $\Gamma_{jk}^i = 0$. Геодезические — прямые $a^i = v^i t$.

II.29. В полярных координатах $\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{z}$, остальные равны нулю. Геодезические — логарифмические спирали $z = e^{k\varphi}$.

II.30. В полярных координатах $ds^2 = \frac{1}{z^2} dz^2 + d\varphi^2$.

§ 12

I2.4. Использовать теорему Энгеля.

I2.6. 1) Коммутативная алгебра; 2) $[e_1, e_2] = e_3$, остальные $[e_i, e_j] = 0$.

I2.7. Пусть $g^{(\kappa)} = 0$, но $g^{(\kappa-1)} \neq 0$. Тогда идеал $h = g^{(\kappa-1)}$ принадлежит центру.

I2.8. Если $(g|h)^{(\kappa)} = 0$, то $g^{(\kappa)} \subset h \subset z$. Поэтому $g^{(\kappa+1)} \subset [g, z] = 0$.

I2.10. Сначала показать, что если $u \in h$, то $(adu)^m v = \sum_{s=0}^m (-1)^{m-s} C_s^m u^s v u^{m-s}$. Отсюда $(adu)^{2\kappa} = 0$.

I2.12. $sl(n)$.

I2.13. $t_o(n, \mathbb{R})$.

I2.20. При $n \geq 2$ не разрешима, так как совпадает со своей производной группой.

I2.21. Рассмотрим канонический гомоморфизм $\varphi : g^{(\kappa-1)} \rightarrow g^{(\kappa-1)} / g^{(\kappa)}$; если $u, v \in g^{(\kappa-1)}$, то $[u, v] \in g^{(\kappa)}$ и поэтому $[\varphi u, \varphi v] = \varphi [u, v] = 0$.

I2.22. Рассмотрим канонический гомоморфизм

$$\varphi : g^{(\kappa-1)} \rightarrow g^{(\kappa-1)} / h.$$

I2.23. Учсть, что $h^{(\kappa)} \subset g^{(\kappa)}$, $h_{(\kappa)} \subset g_{(\kappa)}$.

I2.24. Если $\varphi : g \rightarrow g'$ гомоморфизм, то

$$g'^{(\kappa)} = \varphi(g^{(\kappa)}), \quad g'_{(\kappa)} = \varphi(g_{(\kappa)}).$$

I2.25. Если $(g/h)^{(\kappa)} = 0$, то $g^{(\kappa)} = h$. Но так как $h^{(m)} = 0$ для некоторого m , то $g^{(\kappa+m-1)} = 0$.

I2.27. Форма Киллинга $B(u, v) = -2(u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3)$ отрицательно определена. Группа автоморфизмов есть группа вращений $SO(3, \mathbb{R})$.

I2.28. В силу задачи I2.37 достаточно установить, что $SO(3, \mathbb{R})$ полупроста.

I2.29. Если $C_{\kappa j}^{\kappa} \neq 0$, то система $C_{\kappa j}^{\kappa} v^j = 0$ имеет $\kappa - 1$ независимых решений. На основании задачи 9.8 они порождают $(\kappa - 1)$ -мерный идеал, что невозможно.

I2.35. Все нетривиальные нормальные делители простой группы Ли дискретны.

I2.36. Метрический тензор Киллинга $g_{ij} = C_{is}^{\kappa} C_{jk}^s$ должен быть невырожденным: $\det(g_{ij}) \neq 0$.

I2.38. Всякий коммутативный идеал является разрешимым: $h^{(2)} = 0$.

I2.39. Так как $[h, m] \subset h \cap m$, то $(a) \Rightarrow (d')$. Импликация $(d') \Rightarrow (b)$ вытекает из равенства $adu \cdot adv = 0$ как только $u \in h$, $v \in m$. Если выполнено (b) , то идеал $h \cap m$ разрешим и поэтому $h \cap m = 0$.

I2.40. Заметить, что естественный гомоморфизм $g \rightarrow g/z$ устанавливает биективное соответствие между идеалами $h \subset g$, содержащими радикал z , и идеалами в g/z . Последние имеют вид h/z . Если h/z разрешим, то согласно задаче I2.25 разрешимым является и h , отсюда $h = z$.

I2.41. Ограничение формы Киллинга на идеале $h \subset g$ опре-

делает форму Киллинга на h , которая также невырождена. Заметить, что факторалгебра g/h изоморфна $h^\perp$.

I2.44. Обе алгебры полупростые.

I2.45. Для полупростой группы $G^{(2)} = G$. Поэтому всякая матрица $C \in G$ может быть представлена в виде $C = ABA^{-1}B^{-1}$.

I2.46. Учесть, что $\varphi(g) = g / \ker \varphi$.

I2.47. Так как алгебра g имеет нулевой центр, то представление ad точное. Поэтому алгебра $ad(g)$ также полупроста. Так как $ad(g) \subset D(g)$ идеал, то его ортогональное дополнение относительно метрики Киллинга тоже идеал и $D(g) = ad(g) \oplus (ad(g))^\perp$. Поскольку $[D, ad(u)] = ad(Du)$ (см. задачу 9.19.), то предположив, что $D \in (ad(g))^\perp$, получим $D = 0$ и, значит, $(ad(g))^\perp = 0$.

I2.48. Форма Киллинга отрицательно определенная. Пусть $\{e_i\}$ — ортонормированный базис относительно $B(u, v)$. Так как B инвариантна, то автоморфизмы представляются матрицами $A \in O(n)$. Компактность подгруппы Ли $Aut(g) \subset GL(g)$ вытекает из ее замкнутости.

I2.49. Согласно задаче I2.47. в случае полупростой группы Ли алгебры Ли групп $Ad(G)$ и $Aut(g)$ совпадают, причем $Ad(G)$ связна как образ связной группы G .

I2.50. Использовать метрику Киллинга.

I2.51. Если оператор $A \in Z$, то он перестановочен с элементами алгебры Ли g группы G , а также с элементами ее комплексного расширения g^C , снова полупростой алгебры Ли. Так как она вполне приводима, то в адаптированном базисе $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$, где каждое A_i в силу леммы Шура (задача 8.27) имеет вид $A_i = \lambda_i I_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Остается учесть, что операторы A унимодулярны (задача I2.45).

I2.52. Присоединенное представление $Ad(G)$ полупростой группы Ли является локальным изоморфизмом.

I2.53. Центр $Z = \lambda e_4$. Вычисляя форму Киллинга, получим $B(u, v) = 6(3u^2v^2 - u^1v^3 - u^3v^1)$. Она невырождена на подалгебре $L^3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ и, следовательно, последняя полупроста.

I2.54. Имеем $g^2 = m^2$, а так как m полупроста, то $m^2 = m$.

I2.55. Если g редуктивна, то $g^2 = m^2 \subset m$ и поэтому $Z \cap g^2 = 0$. Кроме того, если $h \subset g$ — коммутативный идеал,

то его образ при естественном гомоморфизме $g \rightarrow g/z \cong m$ может быть только нулем (в силу полупростоты m). Значит, $h \in z$.
Обратно, если условия выполнены, то положив $g = z \oplus m$, где $m \supset g^2$, убедимся, что m — идеал, не содержащий отличных от нуля коммутативных идеалов. Поэтому он полупрост.

12.56. Если g — редуктивна, то факторалгебра g/z изоморфна m и поэтому полупроста. Отсюда следует, что радикал алгебры g совпадает с ее центром. Если, следовательно, g разрешима, то $z = z = g$.

12.57. Вследствие существования инвариантной римановой метрики, всякое инвариантное подпространство имеет инвариантное ортогональное дополнение.

12.58. Учесть, что присоединенное представление $ad(g)$ компактной алгебры вполне приводимо.

§ 13

$$13.1. X_\alpha = \partial_\alpha.$$

$$13.2. X = x^\alpha \partial_\alpha.$$

$$13.3. \text{Группа собственных движений в } E^2.$$

$$13.6. \text{Объединение двух открытых полуплоскостей: } \mathbb{R}^2 \setminus \{a^2=0\} \text{ с законом умножения } ab = (a^1 b^2 + b^1, a^2 b^2).$$

$$13.7. 1) X = (x)^2 \partial_1; \quad 2) X = x \partial_1 + y \partial_2; \quad 3) X = y \partial_1 + x \partial_2.$$

$$13.8. X_\alpha = \partial_\alpha, X_{n+1} = x^\alpha \partial_\alpha; [X_\alpha, X_{n+1}] = X_\alpha.$$

$$13.9. X_1 = x \partial_1, X_2 = y \partial_1, X_3 = x \partial_2, X_4 = y \partial_2; \\ [X_1, X_2] = X_2, [X_1, X_3] = X_3, [X_1, X_4] = 0;$$

$$[X_2, X_3] = X_4 - X_1, [X_2, X_4] = -X_2, [X_3, X_4] = X_3.$$

$$13.10. X_1 = \partial_1; X_2 = \partial_2; X_3 = y \partial_1 + x \partial_2;$$

$$[X_1, X_2] = 0; [X_1, X_3] = X_2; [X_2, X_3] = X_1.$$

$$13.11. X_1 = \partial_1, X_2 = x \partial_1, X_3 = (x)^2 \partial_1;$$

$$[X_1, X_2] = X_1, [X_1, X_3] = 2X_2, [X_2, X_3] = X_3.$$

$$I3.I2. \varphi_* \begin{bmatrix} u^1 & u^2 \\ u^3 & u^4 \end{bmatrix} = (u^3 z^2 + (u^4 - u^1)z - u^2) \partial_1.$$

На подгруппе $SL(2, \mathbb{R})$ $u = -u^1$.

$$I3.I3. X_\beta^\alpha = x^\alpha \partial_\beta, \quad [X_\beta^\alpha, X_\tau^\beta] = \delta_\beta^\beta X_\tau^\alpha - \delta_\tau^\alpha X_\beta^\beta.$$

$$I3.I5. X_\alpha = \partial_\alpha, \quad X_\beta^\alpha = x^\alpha \partial_\beta,$$

$$[X_\alpha, X_\beta] = 0, \quad [X_\alpha, X_\beta^\beta] = \delta_\alpha^\beta X_\beta,$$

$$[X_\beta^\alpha, X_\tau^\beta] = \delta_\beta^\beta X_\tau^\alpha - \delta_\tau^\alpha X_\beta^\beta.$$

$$I3.I6. X_\beta^\alpha = x^\alpha \partial_\beta - x^\beta \partial_\alpha;$$

$$[X_\beta^\alpha, X_\tau^\beta] = \delta_\beta^\beta X_\tau^\alpha - \delta_\tau^\alpha X_\beta^\beta - \delta_\tau^\beta X_\beta^\alpha + \delta_\beta^\alpha X_\tau^\beta.$$

$$I3.I7. X_\beta^a = x^a \partial_\beta - x^\beta \partial_a, \quad a < \beta \leq p;$$

$$X_{\bar{\beta}}^{\bar{a}} = x^{\bar{a}} \partial_{\bar{\beta}} - x^{\bar{\beta}} \partial_{\bar{a}}, \quad \bar{\beta} > \bar{a} > p;$$

$$X_{\bar{\beta}}^a = x^a \partial_{\bar{\beta}} + x^{\bar{\beta}} \partial_a.$$

I3.I8. $X_\beta^\alpha = A_\beta^\alpha \partial / \partial A_\alpha^\beta$, где A_β^α координаты базиса $\{e_\beta\}$ относительно стандартного базиса: $e_\beta = A_\beta^\alpha e_\alpha$, $e_\alpha = (\delta_\alpha^\alpha)$.

Структурные уравнения $[X_\beta^\alpha, X_\tau^\beta] = \delta_\tau^\alpha X_\beta^\beta - \delta_\beta^\beta X_\tau^\alpha$.

I3.I9. $\partial_\alpha, x^\beta \partial_\alpha, x^\alpha x^\beta \partial_\alpha$. Группа изоморфна простой группе Ли $SL(n+1, \mathbb{R})$, если n четно и $SL(n+1, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$, если n нечетно.

$$I3.20. X_\beta^\alpha = g_{\beta\gamma} \partial / \partial g_{\alpha\gamma} + g_{\gamma\alpha} \partial / \partial g_{\gamma\beta}.$$

I3.21. Нет.

$$I3.22. f = 2x + ce^y.$$

$$I3.23. f = 0.$$

I3.24. При $A \neq I$ всякое собственное движение имеет единственную неподвижную точку.

I3.25. $H = \{X_i\}$ - вращения вокруг оси x .

I3.26. $X = X_1 \cos \alpha + X_2 \cos \beta + X_3 \cos \gamma$, где X_i — операторы группы вращений в E^3 (задача I3.25).

I3.27. Аффинная группа с операторами $X_1 = \partial_1$, $X_2 = x \partial_1$.

I3.28. Выбрав точку $x = (1; 0; \dots; 0)$, получим, что H изоморфна группе матриц вида $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & A \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $A \in GL(n, \mathbb{R})$.

I3.29. $H = U(2) \times U(1)$.

I3.30. $\mathbb{Z}$.

I3.32. $X = \partial_\varphi$.

I3.33. $X_1 = \partial_\varphi$, $X_2 = \partial_\theta$.

I3.34. $X_1 = \operatorname{tg} \theta \cos \varphi \partial_\varphi - \sin \varphi \partial_\theta$,

$X_2 = \operatorname{tg} \theta \sin \varphi \partial_\varphi + \cos \varphi \partial_\theta$, $X_3 = \partial_\varphi$.

I3.36. $\{\partial_1 + y \partial_2, \partial_2\}$, $\{\partial_1 + y \partial_2, y \partial_2\}$.

I3.39. Так как $H = \{X_4\}$ — идеал, то указанный гомоморфизм есть естественная проекция $G \rightarrow G/H$.

I3.40.

$$(Ad(a)) = \begin{bmatrix} (a^4)^{-3} & 0 & 0 & 3a^1 \\ -a^3(a^4)^{-3} & (a^4)^{-1} & a^1(a^4)^2 & a^2 - 2a^1 a^3 \\ 0 & 0 & (a^4)^2 & -2a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

I3.44. Сделать преобразование координат $x = e^y$, $a = e^b$.

I3.45. Перейти к полярным координатам.

I3.46. $X_i = C_{ij}^\kappa u^j \partial_\kappa$.

§ I4

I4.1. $H = SO(2)$

I4.2. Группа матриц вида $\begin{bmatrix} A & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$, $A \in GL(n-1, \mathbb{R})$, $\alpha \in (\mathbb{R}^{n-1})^*$.

I4.3. Пусть $A \in SO(n+1)$ — вращение, переводящее x_0 в x . В качестве A можно взять любую специальную ортогональную матрицу с последним столбцом $A_{n+1}^\alpha = x^\alpha$. Тогда $H(x) = A \cdot SO(n) \cdot A^{-1}$.

I4.4. Положив $y = ax$, получим $H(y) = aH(x)a^{-1}$.

I4.5. Выбрав κ -плоскость $(0, e_1, \dots, e_\kappa)$, получим, что элемент $(a, A) \in GA(n)$ принадлежит стационарной подгруппе H при условиях $a^{\bar{\sigma}} = 0, A_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} = 0$, где $\bar{\sigma} = 1, \dots, \kappa; \bar{\sigma} = \kappa+1, \dots, n$. Поэтому $\dim GA(n)/H = (n-\kappa)(\kappa+1)$.

I4.6. Положив $Y = \eta^\alpha(x) \partial_\alpha$, запишем условия $[X_i, Y] = 0$ в координатах: $\xi_i^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\sigma}} \eta^\alpha - \eta^\alpha \partial_{\bar{\sigma}} \xi_i^{\bar{\sigma}} = 0$ или, так как группа просто транзитивна, $\partial_{\bar{\sigma}} \eta^\alpha + \Gamma_{\bar{\sigma}\gamma}^\alpha \eta^\gamma = 0$. Эти уравнения вполне интегрируемы, а их общее решение есть линейная комбинация с постоянными коэффициентами n независимых решений $Y_j = \eta_j^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\sigma}}$. Показать, что $[Y_i, Y_j] = \bar{C}_{ij}^\kappa Y_\kappa$, где $\bar{C}_{ij}^\kappa$ — константы, связанные с C_{ij}^κ тензорным преобразованием.

I4.8. $Y_1 = y \partial_{y'}, Y_2 = y \partial_z; x' = x + \lambda y, y' = \mu y$.

I4.9. Тор T^2 .

I4.10. 1) Цилиндр; 2) тор; 3) лист Мебиуса; 4) бутылка Клейна.

I4.11. Проективное пространство P^n .

I4.12. S^n .

I4.13. Проективные пространства RP^n и CP^n соответственно.

I4.14. Комплексное проективное пространство CP^n .

I4.15. Сфера S^2 . Естественная проекция $\omega: S^3 \rightarrow S^2$ расщепляет S^3 на двухпараметрическое семейство больших кругов (расслоение Хопфа).

I4.16. В силу разложения $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/d & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$

пространство G/H отождествляется с $\mathbb{R}$ с точками $x = \frac{b}{d}$. Группа G действует на $\mathbb{R}$ как группа проективных преобразова-

ний: $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$.

I4.17. В силу разложения $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b/a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix}$ пространство

$M = G/H$ изоморфно действительной прямой $\mathbb{R}$ с точками $x = \frac{b}{a}$.

Действие G на $\mathbb{R}$ определяется формулой $x' = \frac{1}{a^2}(x + ab)$.

I4.18. $G \setminus H = \mathbb{R}$, $x' = a^2(x + \frac{b}{a})$.

14.19. В области $U \subset \mathbb{R}^n$, где $x^n \neq 0$, можно положить $y^\alpha = \frac{x^\alpha}{x^n}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n-1$). Получим $Y = \rho_* X =$
 $= (A_n^\alpha + A_\beta^\alpha y^\beta - A_n^n y^\alpha - A_\beta^n y^\beta y^\alpha) \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$.

14.20. Непрерывный образ компактного пространства компактен.

14.21. Учесть, что естественное отображение ω непрерывно и открыто.

14.22. Если $\mathcal{N} \subset H$, то каждому $n \in \mathcal{N}$ соответствует тождественное преобразование.

14.23. Заметив, что естественное отображение $\omega: G \rightarrow G/H$ открыто, положим $G = U \cup V$, где U, V — непустые открытые множества. Тогда $G/H = \omega(U) \cup \omega(V)$. Так как G/H связно, то $\omega(U) \cap \omega(V) \neq \emptyset$ и существует элемент $\omega(\alpha) \in \omega(U) \cap \omega(V)$. Отсюда следует, что смежный класс $\omega(\alpha) = \alpha H$ пересекается с $U: U_1 = \alpha H \cap U$, и с $V: V_1 = \alpha H \cap V$. В силу связности αH получим $U_1 \cap V_1 \neq \emptyset$ и, значит, $U \cap V \neq \emptyset$.

14.24. Используя результат задачи 10.4, имеем $H = H_e$.

14.26. Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли стационарной подгруппы и $\mathfrak{m}$ — дополнительное подпространство. Показать, что существует диффеоморфизм ψ некоторой окрестности U точки $x_0 = \omega(e)$ на окрестность нулевого вектора в $\mathfrak{m}$. Тогда $S(x) = \exp \psi(x)$, $x \in U$ есть локальное сечение.

$$14.27. X_1 = x \partial_1 + y \partial_2, \quad X_2 = -y \partial_1 + x \partial_2.$$

$$14.28. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\frac{x}{z^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{y}{z^2},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{x}{z^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{y}{z^2}, \quad \text{где } z^2 = x^2 + y^2.$$

$$14.29. \text{Если } S(x) = x^{-1}, \text{ то } R_a^{-1} = S L_a S^{-1}.$$

14.30. Полагая $A = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix}$, получим $z_1' = a z_1 + b \bar{z}_2$,
 $z_2' = a z_2 + b \bar{z}_1$, где $a, b \in \mathbb{C}$. При вещественной реализации это дает линейные операторы в $\mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{bmatrix} a^1 & -a^2 & b^1 & b^2 \\ a^2 & a^1 & b^2 & -b^1 \\ b^1 & b^2 & a^1 & -a^2 \\ b^2 & -b^1 & a^2 & a^1 \end{bmatrix}.$$

14.31. Если $q = a + bi + cj + dk$, то в базисе $\{1, i, j, k\}$

$$(L_q) = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}.$$

Матрица ортогональна при $|q| = 1$.

14.32. Полагая $q = z_1 + z_2 j$ и $p = a + bj$, где $z_1, z_2, a, b \in \mathbb{C}$, получим $z'_1 = az_1 - \bar{b}z_2$, $z'_2 = bz_1 + \bar{a}z_2$. При $|p| = 1$ это дает преобразования группы $SU(2)$ в $\mathbb{C}^2$.

14.33. Из соответствия $\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix}$

получим $z'_1 = az_1 - \bar{b}z_2$, $z'_2 = bz_1 + \bar{a}z_2$, где $a, b \in \mathbb{C}$. Переходя к вещественной реализации, получим регулярное представление группы кватернионов единичного модуля ортогональными операторами:

$$A = \begin{bmatrix} a^1 & -a^2 & -b^1 & -b^2 \\ a^2 & a^1 & -b^2 & b^1 \\ b^1 & b^2 & a^1 & -a^2 \\ b^2 & -b^1 & a^2 & a^1 \end{bmatrix}.$$

14.34. При расслоении сферы S^3 на левые смежные классы естественное отображение $\omega : S^3 \rightarrow S^2$ имеет вид $\omega(q) = \frac{\bar{a}}{b}$, где $q = a + bj$. Полагая $p = c + dj$, получим $\omega(pq) = \lambda' = \frac{\bar{c}\lambda - \bar{d}}{d\lambda + c}$. Это круговые преобразования Мебиуса сферы Римана S^2 с определителем 1.

14.35. Учесть, что $SU(1, 1)$ состоит из комплексных матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$, $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$.

14.36. $P^n = O(n+1) / O(n) \times \mathbb{Z}_2$.

14.37. Методом, изложенным в примере I, получим $S^{2n-1} = U(n) / U(n-1)$.

14.38. Доказательство аналогично рассмотренному в примере I. Использовать, соответственно, комплексные числа и кватернионы.

14.39. Группа целых чисел $\mathbb{Z}$.

14.40. Рассмотреть факторпространства $SU(n) / SU(n-1)$, диффеоморфные сфере S^{2n-1} . $SU(2)$ диффеоморфна S^3 и односвязна. Далее применить индукцию по n .

I4.41. Рассмотреть факторпространства $Sp(m)/Sp(m-1)$, диффеоморфные сфере S^{4m-1} . Применить индукцию по m .

I4.42. Отождествить однородное пространство $SL(n, \mathbb{C})/SU(n)$ с пространством всех положительно определенных эрмитовых форм.

I4.43. Рассмотреть действие $GL(n, \mathbb{R})$ в пространстве невырожденных квадратичных форм.

I4.46. $M = GL(2n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{C})$. Указание: учесть, что всякая комплексная структура определяет базис $\{e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n\}$ в $\mathbb{R}^{2n}$.

I4.47. $Gz(n, \kappa) = GL(n, \mathbb{R})/H$, где H есть подгруппа матриц $\begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$; $\dim Gz(n, \kappa) = \kappa(n - \kappa)$.

I4.48. $SO(n)/SO(\kappa) \times SO(n - \kappa)$.

I4.49. $Gz(n, \kappa) = O(n)/O(\kappa) \times O(n - \kappa)$.

I4.50. $Gz(n, \kappa) = U(n)/U(\kappa) \times U(n - \kappa)$.

I4.51. $A_{n, \kappa} = GA(n)/H$, где H — стационарная подгруппа κ -плоскости, состоящая из элементов $(A, \alpha) : A \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\kappa, 0, \dots, 0)^T$, $\dim A_{n, \kappa} = (\kappa + 1)(n - \kappa)$.

I4.52. $V_{n, \kappa} = O(n)/O(n - \kappa)$.

I4.53. $M_{n, \kappa} = GL(n, \mathbb{R})/H$, где $H = GL(\kappa, \mathbb{R}) \times GL(n - \kappa, \mathbb{R})$, $\dim M_{n, \kappa} = 2\kappa(n - \kappa)$.

I4.54. $T(n, \mathbb{K})$.

I4.55. $H \cong GL(n, \mathbb{R})$ с операторами $X_\beta^\alpha = x^\alpha \partial_\beta$. Операторы параллельного переноса ∂_α определяют редуктивное дополнение: $[X_\alpha, X_\gamma^\beta] = \delta_\alpha^\beta X_\gamma$.

I4.56. $h = \{X_3\}$; $m = \{X_1, X_2\}$.

I4.57. Нет. Взять $x_0 = (0, \dots, 1) \in \mathbb{R}_0^n$. Тогда h состоит из n -матриц $\begin{bmatrix} u & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$, $u \in gl(n-1, \mathbb{R})$, $\alpha \in (\mathbb{R}^{n-1})^*$. Показать, что любое дополнительное к h подпространство не является $Ad(H)$ -инвариантным.

I4.58. Нет.

I4.59. Нет.

I4.60. Рассмотреть векторное пространство m_1 линейных опе-

раторов $A_1 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ и пространство m_2 линейных операторов $A_2 : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ и показать, что $Ad(H)m_1 = m_1$, $Ad(H)m_2 = m_2$. Отсюда следует, что $m = m_1 \oplus m_2$ является редуктивным дополнением алгебры изотропии $\mathfrak{h}$.

I4.61. $M_{n,k}$ диффеоморфно грассманову многообразию $Gz(n, k)$. Редуктивным дополнением подалгебры $O(k) \times O(n-k)$ является $\tilde{m} = O(n) \cap m$, где m то же, что в задаче I4.60. Оно образовано матрицами вида $\begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{bmatrix}$.

I4.62. Пусть $m = \mathfrak{h}^\perp$ — ортогональное дополнение относительно формы Киллинга. Так как последняя невырождена на $\mathfrak{h}$, то $m \cap \mathfrak{h} = 0$ и, значит, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus m$. Так как форма Киллинга $Ad(H)$ — инвариантна, то из $Ad(H)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ следует также, что $Ad(H)m \subset m$.

I4.65. G^6 состоит из матриц $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, где $A \in O(2)$.

I4.66. $\mathbb{C}P^n = U(n+1)/H$, где $H = U(1) \times U(n)$. Подгруппа неподвижных точек совпадает с H . Каноническое разложение алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{h} = u(1) + u(n)$, состоит из матриц $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$, $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, $u \in u(n)$ и $\mathfrak{m}$ состоит из матриц $\begin{bmatrix} 0 & -v^* \\ v & 0 \end{bmatrix}$, $v \in \mathbb{C}^n$.

I4.67. $Q = SO(n+1)/H$, где $H = SO(2) \times SO(n-1)$.

$\mathfrak{h} = O(2) \oplus O(n-1)$ и $\mathfrak{m}$ состоит из матриц $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -u^T \\ 0 & 0 & -v^T \\ u & v & 0 \end{bmatrix}$, где $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$.

I4.68. $Q_0 = G/SO(n)$. Каноническое разложение имеет вид $O(1, n) = O(n) \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ есть подпространство матриц $\begin{bmatrix} 0 & x^T \\ x & 0 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

I4.71. $O(n) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{h} = O(k) \oplus O(n-k)$, а $\mathfrak{m}$ состоит из матриц $\begin{bmatrix} 0 & -v^T \\ v & 0 \end{bmatrix}$, где v — матрица размера $q \times p$.

I4.73. Пусть $x_0 \in G/H$ и $\tilde{H}$ — группа линейных преобразований касательного пространства $T_{x_0}(G/H)$, индуцированных элементами из H . Она компактна. Поэтому в $T_{x_0}(G/H)$ существует $\tilde{H}$ -инвариантное скалярное произведение $(X, Y)_0$. Для произвольной точки $x \in G/H$ положить $g(X, Y) = (\alpha^{-1} \cdot X, \alpha^{-1} \cdot Y)_0$ и показать, что метрика g корректно определена и G -инвариантна.

I4.74. $M = SL(n, \mathbb{C}) / SU(n)$. Стационарная подгруппа $SU(n)$ компактна. Поэтому в силу задачи I4.73 M - риманово.

I4.75. $g_{\alpha\beta}(z) = (1 - z\bar{z})^{-2} \delta_{\alpha\beta}$.

I4.76. Касательное пространство в точке $x_0 \in M$ отождествить с помощью естественной проекции $\omega : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/H$ с ортогональным дополнением $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^\perp$. Выбирая базис в $\mathfrak{m} : m_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, m_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, получим $B(x, x)|_{\mathfrak{m}} = 8((x^1)^2 + (x^2)^2)$.

I4.77. Линейная группа изотропии в точке x_0 действует транзитивно на множестве двумерных подпространств касательного пространства.

§ I5

I5.1. 1) $X = x\partial_1 - y\partial_2$, орбиты - гиперболы $xy = c$;
2) $X = x\partial_1 + y\partial_2$, орбиты $y = cx^{\frac{m}{k}}$.

В обоих случаях, начало координат $(0, 0)$ - особая точка.

I5.2. 1) $x' = xe^t, y' = ye^t$. Орбиты - прямые $y = cx$;
2) $x' = xe^t, y' = ye^{-t}$. Орбиты - гиперболы $xy = c$.

Начало координат $(0, 0)$ - особая точка.

I5.3. $z = ce^\theta$ логарифмические спирали. Начало координат $(0, 0)$ - особая точка.

I5.4. 1) $x' = \frac{x}{1-tx}, y' = \frac{y}{1-ty}$. Орбиты - гиперболы $xy = c(x-y)$. Особая точка $(0, 0)$;
2) $x' = \frac{x}{1-tx}, y' = \frac{y}{1-tx}$. Орбиты - прямые $y = cx$.

Ось y - особая прямая.

I5.5. Гиперболы $x^2 - y^2 = c$, Особая точка $(0, 0)$.

I5.6. С помощью автоморфизмов $A' = B A B^{-1}$ матрица преобразования может быть приведена к одному из следующих видов:

1) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$, $\mu \neq 0$.

В итоге получим следующие случаи:

Ia. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$; $x' = xe^{\lambda_1 t}, y' = ye^{\lambda_2 t}$.

Орбиты $y = cx^\alpha$ ($\alpha = \lambda_2 / \lambda_1$).

Iб. $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda \neq 0$; $x' = xe^{\lambda t}, y' = ye^{-\lambda t}$ - группа гиперболических вращений. Орбиты $xy = c$ - гиперболы.

Ив. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, $x' = x e^{\lambda t}$, $y' = y e^{\lambda t}$ - группа гомотетий.
Орбиты - прямые $y = kx$, проходящие через начало координат.

Иг. $\lambda_1 \neq 0$; $\lambda_2 = 0$; $x' = x e^{\lambda_1 t}$, $y' = y$.

Орбиты - прямые, параллельные оси x .

2а. $\lambda \neq 0$; $x' = (x + yt) e^{\lambda t}$, $y' = y e^{\lambda t}$.

Орбиты - трансцендентные кривые.

2б. $\lambda = 0$; $x' = x + yt$, $y' = y$ - группа сдвигов вдоль оси x .

Орбиты - прямые, параллельные оси x . Точки оси x неподвижны.

3а. $\lambda \neq 0$; $x' = e^{\lambda t} (x \cos \mu t - y \sin \mu t)$, $y' = e^{\lambda t} (x \sin \mu t + y \cos \mu t)$. Орбиты - логарифмические спирали $z = c e^{-\lambda/\mu \theta}$.

3б. $\lambda = 0$; $x' = x \cos \mu t - y \sin \mu t$, $y' = x \sin \mu t + y \cos \mu t$ группа эллиптических вращений. Орбиты - эллипсы $x^2 + y^2 = c$.

15.7. $x' = x$, $y' = y + xt$, $z' = z + t$. Орбиты - двухпараметрическое семейство прямых $x = c_1$, $y = c_1 z + c_2$.

15.8. Винтовые линии. При $a = 0$ окружности $x^2 + y^2 = c^2$, $z = \text{const}$.

15.9. Линии пересечения цилиндров $x^2 + y^2 = (c_1)^2$, $y^2 + c_2 z^2 = (c_1)^2$. Оси y и z - особые прямые.

15.10. Операторам $X_1 = z \partial_2 + y \partial_3$ и $X_2 = z \partial_1 + x \partial_3$ соответствуют гиперболические вращения вокруг осей x и y , оператору $X_3 = y \partial_1 - x \partial_2$ - эллиптическое вращение вокруг оси z .

15.11. Рассмотрим интегралы $\varphi^b(x)$, ($b = 1, \dots, n-1$)

системы дифференциальных уравнений $\frac{dx'^a}{dt} = \{^a (x')$ и сделать

преобразование координат $y^b = \varphi^b(x)$, $y^n = x^n$.

15.14. 1) Группа переносов $x' = x + a$;

2) группа аффинных преобразований $x' = ax + b$, $a > 0$.

15.15. Группа проективных преобразований

$$x' = \frac{a^1 + (e^{a^2} - a^1 a^3) x}{1 - a^1 x}$$

15.16. $x^{1'} = x^1 + a^1$, $x^{2'} = x^2 + e^{x^1 + a^1} ((x + a^1) a^2 + a^3)$.

15.17. $x' = a^1 x + a^2$, $y' = a^3 x + a^4 y + a^5$.

15.18. 1) $x' = ax + b$, $y' = ay + c$;

2) $x' = a^{\lambda} x + b$, $y' = a^{\lambda} y$.

$$15.19. X^{\alpha'} = a X^{\alpha} + a^{\alpha}, \quad a \neq 0.$$

15.20. 1) Подгруппа подобных преобразований

$$X' = \kappa(x \cos \alpha - y \sin \alpha) + a, \quad y' = \kappa(x \sin \alpha + y \cos \alpha) + b;$$

$$2) \text{ центроаффинная подгруппа } X' = aX + by, \quad y' = cx + dy;$$

$$3) \text{ подгруппа } X = \kappa X, \quad y = \kappa y \quad \text{гомотетий.}$$

15.21. 1) $J = x^2 + y^2$; 2) $J = x^2 - y^2$ - квадраты расстояний точки (X, y) до начала координат.

15.22. $n - 1$ независимых инвариантов

$$J^{\delta} = u^n x^{\delta} - u^{\delta} x^n, \quad (\delta = 1, \dots, n-1).$$

15.23. $\mathcal{F}(x^2 + y^2 + z^2)$. Орбиты - сферы $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$.

15.24. Между $\mathcal{Z}$ инфинитезимальными операторами $X_i = C_{ij}^{\kappa} u^j \partial_{\kappa}$ присоединенной группы имеет место зависимость $u^i X_i = 0$, вследствие чего система $X_i(F) = 0$ имеет по крайней мере одно решение.

15.25. Если $\lambda(u)$ - корень полинома Киллинга и v - соответствующий собственный вектор оператора $ad(u)$, то $[u, v] = \lambda(u)v$. При действии внутреннего автоморфизма $A \in Ad(G)$ $[Au, Av] = \lambda(u)Av$. Значит, Av есть собственный вектор оператора $ad(Au)$ с тем же собственным значением.

$$15.26. Y_1 = v \partial_1 + 2w \partial_2, \quad Y_2 = -u \partial_1 + w \partial_3,$$

$$Y_3 = -2u \partial_2 - v \partial_3, \quad J = -4uw - v^2.$$

15.27. Полином Киллинга имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3u^2 & 3u^1 & 0 \\ -u^3 & \lambda & u^1 \\ 0 & -3u^3 & \lambda + 3u^2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3[3(u^2)^2 - 2u^1 u^3] \lambda.$$

Поэтому единственным инвариантом группы $ad(G)$ является функция $J(u) = 3(u^2)^2 - 2u^1 u^3$ - форма Киллинга.

15.30. Рассмотреть коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G & & \tilde{f} \\ \downarrow f & \searrow \tilde{f} & \\ G/H & \xrightarrow{f} & H, \end{array}$$

где f - каноническое отображение, $\tilde{f}: a \in G \rightarrow a \cdot x_0 \in M$, $f: aH \in G/H \rightarrow a \cdot x_0 \in G \cdot x_0$. Пусть $S: G/H \rightarrow G$ сечение расслоения, рассмотренного в задаче 14.26. Тогда f локально представляется в виде

$f = \tilde{f} \circ S$ и регулярность f вытекает из регулярности $\tilde{f}$.

15.31. Группа внутренних автоморфизмов есть $S^3 / \mathbb{Z}_2 = SO(3, \mathbb{R})$. Это изометрии сферы. Неподвижными точками являются $X = \pm 1$. Поэтому $X' = q X q^{-1}$ есть вращения S^3 вокруг вещественной оси. Орбиты — двумерные сферы и точки $X = \pm 1$.

15.32. При действии группы $GL(n, \mathbb{R}) : X' = A^T X A$ ранг и индекс формы инвариантны. При $n = 2$ рассмотреть конус $\det X = 0$.

15.33. Аффинные подпространства $X + V^k$.

15.34. Особая инвариантная парабола $X^2 - 2y = 0$.

15.35. $\mathcal{I} = \frac{y}{z}$. Инвариантные многообразия — пучок плоскостей $y - cz = 0$, особое инвариантное многообразие $y = 0$, $z = 0$ — ось X .

15.36. $(0, 0, 0)$ — особая точка нулевого порядка, ось z — особая прямая, состоящая из точек первого порядка, конусы $x^2 + y^2 - c^2 z^2 = 0$ — неособые инвариантные многообразия.

15.37. Конусы $x^2 + y^2 - c^2 z^2 = 0$, особая плоскость $y = 0$, точка $(0, 0, 0)$.

15.38. Цилиндры $x^2 + y^2 = c^2$. Ось z — особое инвариантное многообразие.

15.39. Особое инвариантное многообразие $2x^3 - 3xy + z = 0$ (поверхность Кели).

15.40. Семейство квадрик $(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - c(x^4)^2 = 0$, гиперплоскости $x^1 = 0$ и $x^4 = 0$ — особые точки 2-го порядка, 2-плоскость $x^1 = 0$, $x^4 = 0$ и прямая $x^1 = x^2 = x^3 \neq 0$ — особые точки 1-го порядка, $(0, 0, 0)$ — особая точка нулевого порядка.

15.41. $n - 1$ независимых инвариантов $\mathcal{I}^6 = \frac{x^6}{x^n}$, $(6 = 1, \dots, n-1)$. Инвариантные многообразия — конические поверхности $F\left(\frac{x^1}{x^n}, \dots, \frac{x^s}{x^n}\right) = c$, $s \leq n-1$; в частности, прямые и плоскости, проходящие через начало координат.

15.43. $Y_1 = u^2 \partial_1 + 2u^3 \partial_2$, $Y_2 = u^1 \partial_1 + u^3 \partial_3$, $Y_3 = 2u^1 \partial_2 + u^3 \partial_3$.

Инвариантное многообразие — конус $4u^1 u^2 - (u^2)^2 = 0$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

Д у б р о в и н Б. А., Н о в и к о в С. П., Ф о м е н -
к о А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. - М.: На-
ука, 1979.

Л я п и н Е. С., А й з е н ш т а т А. Я., Л е с о -
х и н М. М. Упражнения по теории групп. - М.: Наука, 1967.

М и щ е н к о А. С., С о л о в ъ е в Ю. П., Ф о м е н -
к о А. Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии. - М.:
Изд-во МГУ, 1981.

Н а й м а р к М. А. Теория представлений групп. - М.: Наука,
1976.

П о н т р я г и н Л. С. Непрерывные группы. Изд. 3. - М.:
Наука, 1973.

П о с т н и к о в М. М. Группы и алгебры Ли./Серия: Лекции
по геометрии. Семестр У/. - М.: Наука, 1972.

Ч е б о т а р е в Н. Г. Теория групп Ли. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1940.

Э й з е н х а р т Л. П. Непрерывные группы преобразований.-
М.: ИЛ, 1947.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение.....	3
§ 1. Топологические группы.....	4
§ 2. Группы Ли.....	15
§ 3. Алгебры Ли.....	23
§ 4. Алгебра Ли группы Ли.....	31
§ 5. Экспоненциальное отображение. Локальные группы Ли.....	39
§ 6. Гомоморфизмы, автоморфизмы.....	48
§ 7. Факторгруппы. Прямое и полупрямое произве - дение групп Ли.....	55
§ 8. Линейные представления.....	62
§ 9. Присоединенное представление.....	70
§ 10. Накрывающая группа.....	74
§ 11. Инвариантные формы. Форма Киллинга.....	78
§ 12. Некоторые типы алгебр Ли.....	82
§ 13. Группы Ли преобразований.....	87
§ 14. Однородные пространства.....	97
§ 15. Орбиты. Инвариантные многообразия.....	107
Ответы и указания.....	114
Литература.....	152

,
0.
-

60 коп.